Aula 19/04/2023

Determinantes

As matrizes de Ordem 3 ou matriz 3x3, são aquelas que apresentam três linhas e três colunas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

Para calcular o determinante desse tipo de matriz, utilizamos a **Regra de Sarrus**, que consiste em repetir as duas primeiras colunas logo a seguir à terceira:

$$\left|\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 6\\ 2 & 5 & 8\end{array}\right|\begin{array}{:cc:}1 & 2\\ 2 & 5\\ 2 & 5\end{array}$$

Seguimos os seguintes passos:

1) Calculamos a multiplicação em diagonal. Para tanto, traçamos setas diagonais que facilitam o cálculo.

As primeiras setas são traçadas da esquerda para a direita e correspondem às **diagonais principais**:

$$\left|\begin{array}{ccc}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 6\\ 2 & 5 & 8\end{array}\right|\begin{array}{:cc:}1 & 2\\ 2 & 5\\ 2 & 5\end{array}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & 5 \end{array}\right|$$

$1 \times 5 \times 8 = 40$
$2 \times 6 \times 2 = 24$
$3 \times 2 \times 5 = 30$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 8 & 2 & 5 \end{array}\right|$$

$2 \times 2 \times 8 = 32$
$1 \times 6 \times 5 = 30$
$3 \times 5 \times 2 = 30$

3) Somamos cada uma delas:

Produto das diagonais principais
$40 + 24 + 30 = 94$

Produto das diagonais secundárias
$32 + 30 + 30 = 92$

4) Subtraímos cada um desses resultados:

$94 - 92 = 2$

Logo, o determinante é:

$\det A = 2$

Cofator

O cofator de uma matriz de ordem $n \geq 2$ é definido como:

$A_{ij} = (-1)^{i+j} . D_{ij}$

Onde

A_{ij}: cofator de um elemento a_{ij}
i: linha onde se encontra o elemento
j: coluna onde se encontra o elemento
D_{ij}: é o determinante da matriz resultante da eliminação da linha i e da coluna j.

Determine o cofator do elemento $a_{23,}$ da matriz A indicada

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução

Para calcular o cofator do elemento a_{23}, vamos começar calculando o determinante da matriz resultante da eliminação da linha 2 e da coluna 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \cancel{2} \\ \cancel{-3} & \cancel{4} & \cancel{1} \\ 3 & 2 & \cancel{5} \end{vmatrix}$$

Assim, vamos calcular o determinante dessa matriz:

$$D_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

O cofator será encontrado substituindo o valor de D_{23} na expressão, conforme indicado abaixo:

$A_{23} = (-1)^{2+3} . 1 = -1$

O cofator A_{23}, do elemento a_{23} da matriz dada, é igual a **-1**.

Agora que já sabemos determinar o cofator de um elemento de uma matriz, podemos então aplicar o teorema de Laplace para calcular o seu determinante.

Exemplo

Encontre o determinante da matriz B, indicada abaixo.

$$B=\begin{bmatrix} 4 & 5 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Solução

Vamos selecionar a linha 1, já que nela há um elemento igual a zero.

$$D=\begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

O determinante será encontrado fazendo:

$$D = \Sigma\, a_{ij} \cdot A_{ij}$$

$$D = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14}$$

Linha 1 Linha 1 Linha 1 Linha 1

Coluna 1 Coluna 2 Coluna 3 Coluna 4

$$D = 4 \cdot A_{11} + 5 \cdot A_{12} + (-3) \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14}$$

A partir daqui, como zero multiplicado por qualquer número é zero, o cálculo fica mais simples, pois neste caso a_{14} . A_{14} não precisa ser calculado.

Vamos então calcular cada cofator:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 1.41 = 41$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = -1.7 = -7$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}.\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1.(-27) = -27$$

Note que para determinar o cofator é necessário calcular o determinante de cada matriz de ordem 3 indicada acima. Para esse tipo de matriz, o método mais fácil é aplicar a regra de Sarrus.

Substituindo os valores encontrados na expressão do determinante, temos:

D = 4 . 41 + 5 . (-7) + (-3) . (-27) = 164 - 35 + 81 = 210

Chegamos ao resultado 210, que é o determinante dessa matriz 4x4 ou matriz de 4.ª

Exercício Resolvido

Utilizando o Teorema de Laplace, calcule o determinante da matriz 5x5 indicada abaixo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução

Na primeira coluna da matriz, quase todos os elementos são iguais a zero. Para facilitar, vamos escolher essa coluna.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

O determinante será encontrado fazendo-se:

D = 1 . A_{11} + 0 . A_{21} + 0 . A_{31} + 0 . A_{41} + 0 . A_{51}

O único cofator que teremos que calcular é o A_{11}, pois os demais serão multiplicados por zero. O valor de A_{11} será encontrado fazendo:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} . \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Como deveremos calcular o determinante de uma matriz de ordem 4, vamos utilizar novamente o teorema de Laplace. Para este cálculo, escolhemos a primeira linha, pois esta apresenta apenas um valor diferente de zero.

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -6 & 6 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

D´= 4 . A'_{11} + 0. A'_{12} + 0 . A'_{13} + 0 . A'_{14}

Para calcular o determinante D', precisamos apenas encontrar o valor de A'_{11}, pois os demais cofatores estão multiplicados por zero.

$$A'_{11} = (-1)^{1+1} . \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -12$$

Desta forma D' será igual a:

D' = 4 . (-12) = - 48

Podemos então calcular o determinante procurado, substituindo esse valor na expressão do A_{11}:

A_{11} = 1. (-48) = - 48

Assim, o determinante será dado por:

D = 1. A_{11} = - 48

Portanto, o determinante da matriz de ordem 5, é igual a **- 48**.

Referencia dos Slides anteriores:

GOUVEIA, Rosimar. Teorema de Laplace. Toda Matéria, *[s.d.]*. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/teorema-de-laplace/ Acesso em: 19 abr. 2023

Propriedades dos Determinantes

PROPRIEDADE 1

Sempre que uma matriz apresentar todos os elementos de uma mesma linha (ou coluna) iguais a zero, o valor do seu determinante também será zero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

PROPRIEDADE 2

Sempre que uma matriz apresentar duas linhas (ou duas colunas) iguais, o valor do seu determinante será igual a zero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

PROPRIEDADE 3

Toda matriz que apresente duas linhas (ou duas colunas) com elementos de valores proporcionais, o valor do determinante será igual a zero.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 2 & 10 & 20 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

PROPRIEDADE 4

Quando multiplicamos todos os elementos de uma linha (ou coluna) de uma matriz por uma constante k, o determinante da nova matriz passa a ser multiplicado por k.

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$\begin{vmatrix} 20 & 50 & 60 \\ 1 & 6 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 60$$

PROPRIEDADE 5

Quando multiplicamos uma matriz quadrada A por um número real k, o novo determinante passa a ser multiplicado por k^n, onde n é a ordem da matriz A.
det(k.A) = k^n . detA

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -11$$

$$\begin{vmatrix} 10 & 50 \\ 30 & 40 \end{vmatrix} = 10^2.(-11) = -1100$$

PROPRIEDADE 6

O valor do determinante de uma matriz transposta é igual ao determinante da matriz original: **detA = det(A^t).**

Dei um exemplo na lousa.

PROPRIEDADE 7

Quando trocamos duas linhas (ou duas colunas) de posição em uma matriz, o valor do determinante passa a ser o oposto do determinante da matriz original.

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -11$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11$$

PROPRIEDADE 8

O valor do determinante de uma matriz triangular pode ser calculado apenas multiplicando os elementos da diagonal principal.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 4 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 1.5.10 = 50$$

Referencia:

https://sabermatematica.com.br/propriedades-dos-determinantes.html

Não caem na Prova

PROPRIEDADE 9

Dadas duas matrizes quadradas de mesma ordem, o determinante do produto é igual ao produto dos determinantes.
det(A.B) = detA . detB

PROPRIEDADE 10

Quando multiplicamos todos os elementos de uma mesma linha (ou coluna) por um mesmo número e somamos a outra linha (ou coluna), temos uma nova matriz que apresenta o mesmo determinante da anterior.