1. Considere o problema de autovalor com condição de Robin:

$$\begin{aligned} &X'' + \lambda X = 0 \\ &X'(0) - a_0 X(0) = 0, \\ &X'(L) + a_L X(L) = 0. \end{aligned}$$

   (a) Mostre que $\lambda = 0$ é um autovalor se e somente se $a_0 + a_L = -a_0 a_L L$.

   (b) Encontre as autofunções correspondentes ao autovalor nulo.

2. Considere o problema de autovalor de Robin. Se $a_0 < 0$, $a_L < 0$ e $-a_0 - a_L < a_0 a_L L$, mostre que existem dois autovalores negativos. Este caso pode ser chamado "absorção substancial em ambas as extremidades." (Dica: mostre que a curva racional $y = -(a_0 + a_L)\gamma/(\gamma^2 + a_0 a_L)$ tem um único máximo e cruza a reta $y = 1$ em dois pontos. Deduza que ela cruza a curva $y = \tanh \gamma L$ em dois pontos.)

3. No Exercício 2 (absorção substancial em ambas as extremidades) mostre graficamente que existe um número infinito de autovalores positivos. Mostrar graficamente que satisfazem

$$n^2 \frac{\pi^2}{L^2} < \lambda_n < (n+1)^2 \frac{\pi^2}{L^2} \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lambda_n - n^2 \frac{\pi^2}{L^2} \right) = 0.$$

4. Se $a_0 = a_L = a$ no problema de Robin, mostre que:

   (a) Não há autovalores negativos se $a \geq 0$, há um se $-2/L < a < 0$, e há dois se $a < -2/L$.

   (b) Zero é um autovalor se e somente se $a = 0$ ou $a = -2/L$.

5. Considere novamente as condições de Robin em ambas as extremidades para a_0 e a_L arbitrários.

   (a) No plano $a_0 a_L$, esboce a hipérbole $a_0 + a_L = -a_0 a_L L$. Indicar as assíntotas. Para (a_0, a_L) nesta hipérbole, zero é um autovalor, de acordo com o Exercício 1(a).

   (b) Mostre que a hipérbole separa todo o plano em três regiões, dependendo se há dois, um ou nenhum autovalores negativos.