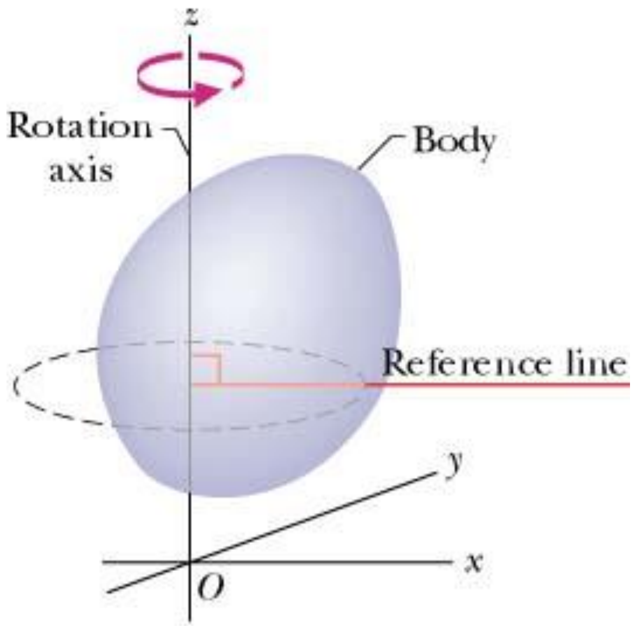
Capítulo 10 - Rotação

Neste capítulo estudaremos o movimento rotacional de corpos rígidos em torno de um eixo fixo. Para descrever este tipo de movimento introduziremos os novos conceitos de:

-Posição angular (θ)
-Deslocamento angular ($\Delta\theta$)
-Velocidade angular média e instantânea ($\boldsymbol{\omega}$)
-Aceleração angular média e instantânea ($\boldsymbol{\alpha}$)
-Inércia rotacional ou momento de inércia ($\boldsymbol{I}$)
-Torque ($\boldsymbol{\tau}$)

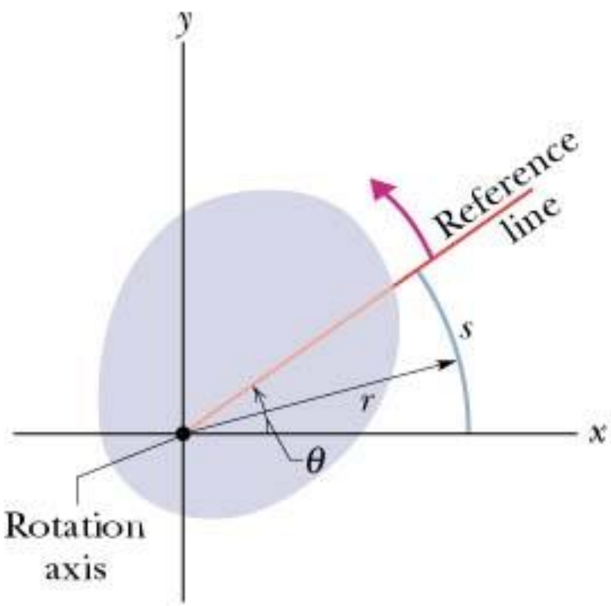
Também calcularemos a energia cinética associada a rotação, escreveremos a segunda lei de Newton para o movimento rotacional, e introduziremos o conceito de trabalho-energia cinética para o movimento rotacional.

Variáveis rotacionais



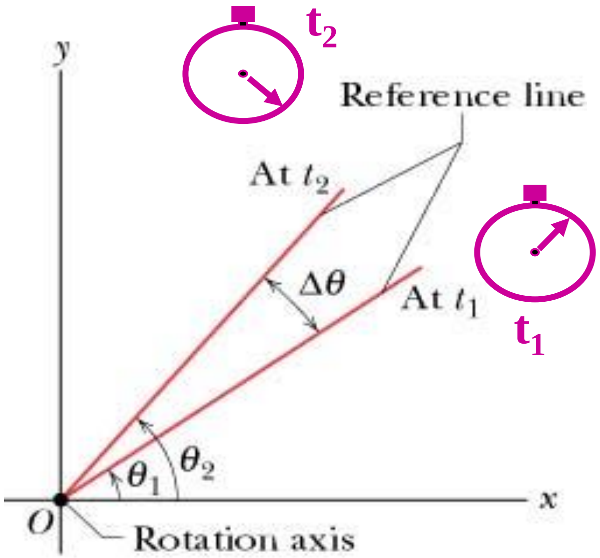
Um **corpo rígido** pode girar em torno de um eixo fixo com todas as suas partes juntas sem haver qualquer mudança em sua forma.

A **posição angular** de uma linha de referência perpendicular ao eixo fixo z em um tempo t é dada por $\boldsymbol{\theta(t)}$ que a linha faz com uma reta fixa tomada como a posição angular zero em $t = 0$.



$\theta(t)$ (rad) define a posição de qqer ponto do corpo. Está relacionado ao comprimento do arco s que um ponto viaja à distância r do eixo z:

$$\boxed{\theta = \frac{s}{r}}$$



Deslocamento angular (rad)

Para as posições θ_1 (em t_1) a θ_2 (t_2), o **deslocamento angular** de todos os pontos do corpo rígido é:

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1.$$

Velocidade angular (rad/s)

Velocidade angular média para o intervalo t_1 a t_2:

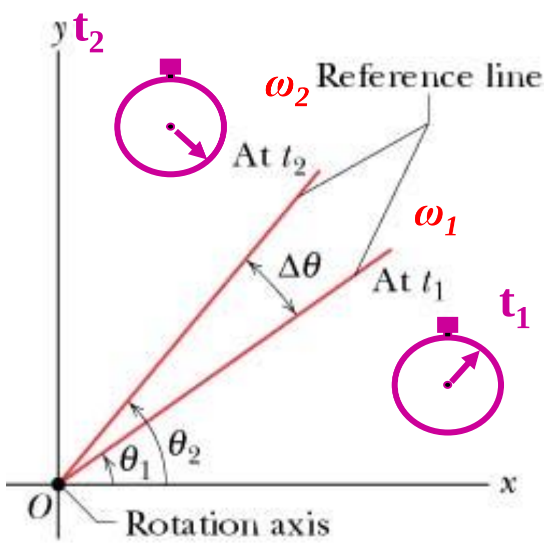
$$\omega_{avg} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Velocidade angular instantânea:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$\boxed{\omega = \frac{d\theta}{dt}}$$

Rotação no sentido **anti-horário** → ω **positivo**
Rotação **horária** → ω **negativo**.



Aceleração angular (rad/s^2)

É a taxa de variação da velocidade angular com o tempo. Em t_1, têm-se (ω_1) e em t_2 (ω_2) .

Aceleração angular média entre t_1 e t_2

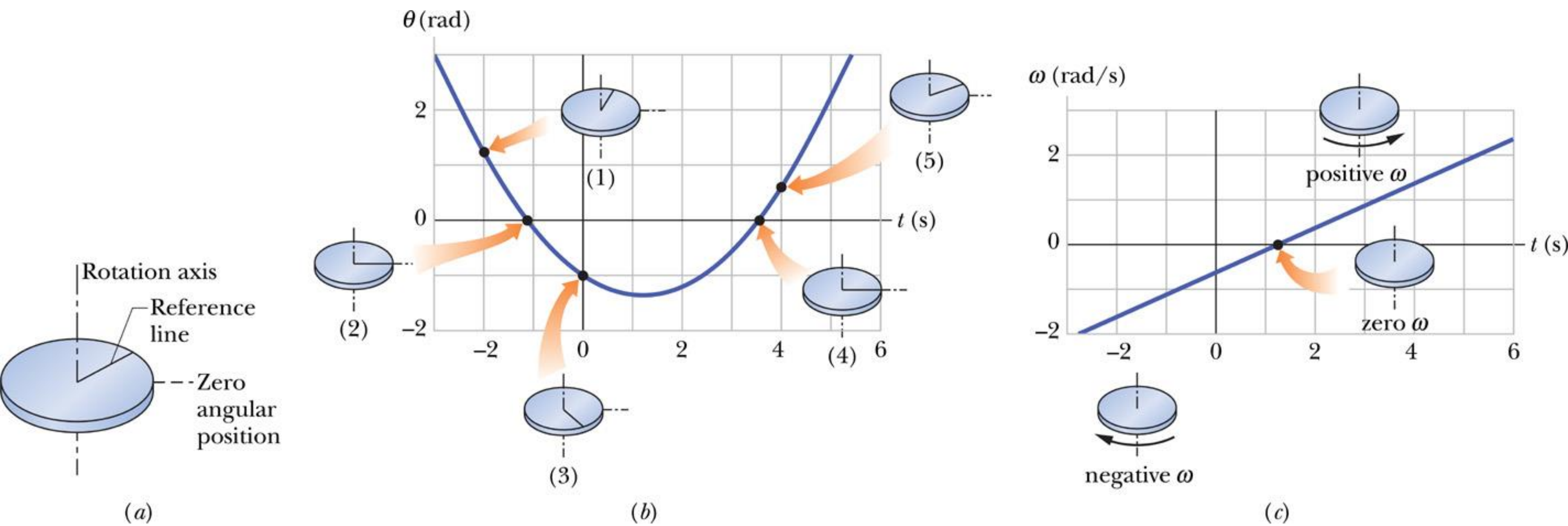
$$\alpha_{avg} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

A aceleração angular instantânea é definida como o limite $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ as $\Delta t \to 0$

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \qquad \boxed{\alpha = \frac{d\omega}{dt}}$$

Exemplo 10-1

O disco da figura 10-5a está girando em torno do seu eixo central como um carrossel. A posição angular $\theta(t)$ de uma reta de referência do disco é dada por $\theta = -1{,}00 - 0{,}600t + 0{,}250t^2$ com t em segundos, θ em radianos e a posição angular zero indicada. (a) Faça um gráfico da posição angular do disco em função do tempo, de t = -3,0 s a t = 5,4 s. Desenhe o disco e sua reta de referência em t = -2,0 s, 0 s, 4,0 s e os instantes em que o gráfico cruza o eixo t. (b) Em que instante t_{min} o ângulo $\theta(t)$ passa pelo valor mínimo mostrado na fig. 10-5b? Qual é esse valor mínimo? (c) Plote a velocidade angular ω do disco em função do tempo de t = -3,0 s a t = 6,0 s. Desenhe o disco e indique o sentido de rotação e o sinal de ω em t = -2,0 s, 4,0 s e t_{min}.



(a) Faça um gráfico da posição angular do disco em função do tempo, de t = -3,0 s a t = 5,4 s. Desenhe o disco e sua reta de referência em t = -2,0 s, 0 s, 4,0 s e os instantes em que o gráfico cruza o eixo t.

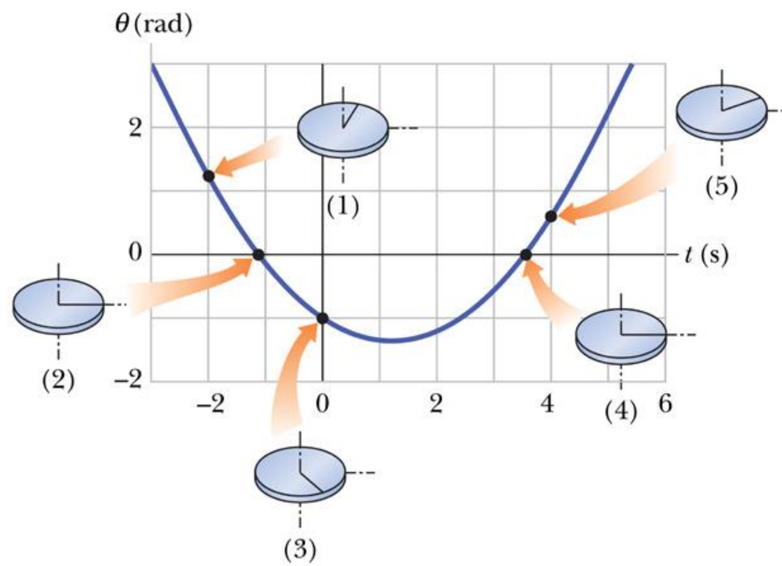
Cálculos: Para desenhar o disco e sua reta de referência em um certo instante precisamos determinar o valor de θ nesse instante. Para isso substituímos t por seu valor na Eq. 10-9. Para $t = -2{,}0$ s, obtemos

$$\theta = -1{,}00 - (0{,}600)(-2{,}0) + (0{,}250)(-2{,}0)^2$$

$$= 1{,}2 \text{ rad} = 1{,}2 \text{ rad}\,\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = 69°.$$

Isso significa que em $t = -2{,}0$ s a reta de referência está deslocada de 1,2 rad = 69° no sentido anti-horário (porque θ é positivo) em relação à posição zero. O desenho 1 da Fig.

Da mesma forma, para $t = 0$ encontramos $\theta = -1{,}00$ rad $= -57°$, o que significa que a reta de referência está deslocada de 1,0 rad = 57° no sentido horário em relação à posição angular zero, como mostra o desenho 3. Para $t = 4{,}0$ s encontramos $\theta = 0{,}60$ rad $= 34°$ (desenho 5). Fazer desenhos para os instantes em que a curva cruza o eixo t é fácil, pois nesse caso $\theta = 0$ e a reta de referência está momentaneamente alinhada com a posição angular zero (desenhos 2 e 4).



(b) Em que instante t_{min} o ângulo $\theta(t)$ passa pelo valor mínimo mostrado na fig. 10-5b? Qual é esse valor mínimo?

$$\frac{d\theta}{dt} = -0{,}600 + 0{,}500t. \qquad (10\text{-}10)$$

Igualando esse resultado a zero e explicitando t, determinamos o instante em que $\theta(t)$ é mínimo:

$$t_{mín} = 1{,}20 \text{ s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Para obter o valor mínimo de θ, substituímos $t_{mín}$ na Eq. 10-9, o que nos dá

$$\theta = -1{,}36 \text{ rad} \approx -77{,}9°. \qquad \text{(Resposta)}$$

(c) Plote a velocidade angular ω do disco em função do tempo de t = -3,0 s a t = 6,0 s. Desenhe o disco e indique o sentido de rotação e o sinal de ω em t = -2,0 s, 4,0 s e t_{min}.

IDÉIA-CHAVE De acordo com a Eq. 10-6, a velocidade angular ω é igual a $d\theta/dt$, dada pela Eq. 10-10. Temos, portanto,

$$\omega = -0{,}600 + 0{,}500t. \qquad (10\text{-}11)$$

O gráfico da função $\omega(t)$ aparece na Fig. 10-5*c*.

Cálculos: Para desenhar o disco em $t = -2{,}0$ s substituímos este valor de t na Eq. 10-11, obtendo

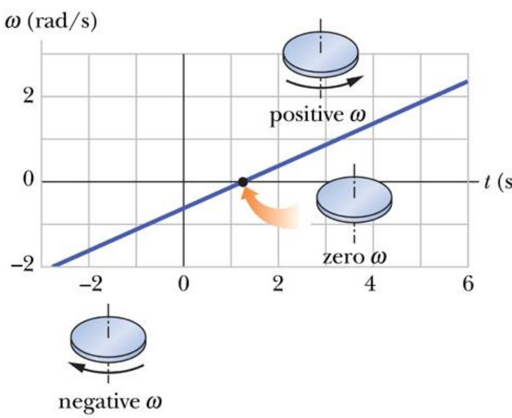
$$\omega = -1{,}6 \text{ rad/s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

O sinal negativo mostra que em $t = -2{,}0$ s o disco está girando no sentido horário (desenho mais baixo da Fig. 10-5*c*).

Fazendo $t = 4{,}0$ s na Eq. 10-11, obtemos

$$\omega = 1{,}4 \text{ rad/s.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Para t_{min}, ω=0!



(c)

Exemplo 10-2

Um pião gira com aceleração angular α = 5t³ – 4t, onde t está em segundos e α em radianos por segundo ao quadrado. Em t=0 a velocidade angular do pião é 5 rad/s e uma reta de referência traçada no pião está na posição angular θ = 2 rad. (a) Obtenha uma expressão para a velocidade angular do pião, ω(t); (b) Obtenha uma expressão para a posição angular do pião θ(t).

Cálculos: De acordo com a Eq. 10-8,

$$d\omega = \alpha\, dt,$$

e portanto

$$\int d\omega = \int \alpha\, dt.$$

Assim, temos:

$$\omega = \int (5t^3 - 4t)\, dt = \tfrac{5}{4}t^4 - \tfrac{4}{2}t^2 + C.$$

Para calcular o valor da constante de integração C observamos que $\omega = 5$ rad/s em $t = 0$. Substituindo esses valores na expressão de ω, obtemos:

$$5 \text{ rad/s} = 0 - 0 + C,$$

E, portanto, $C = 5$ rad/s. Nesse caso,

$$\omega = \tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5. \quad \text{(Resposta)}$$

Cálculos: Como, de acordo com a Eq. 10-6,

$$d\theta = \omega\, dt,$$

podemos escrever

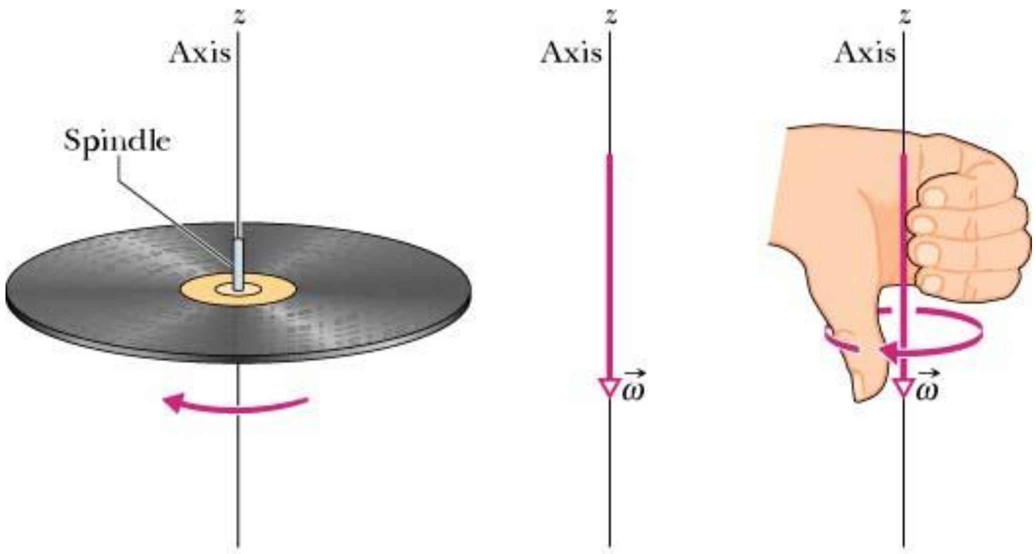
$$\theta = \int \omega\, dt = \int (\tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5)\, dt$$

$$= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + C'$$

$$= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + 2, \quad \text{(Resposta)}$$

onde C' foi calculado para que $\theta = 2$ rad em $t = 0$.

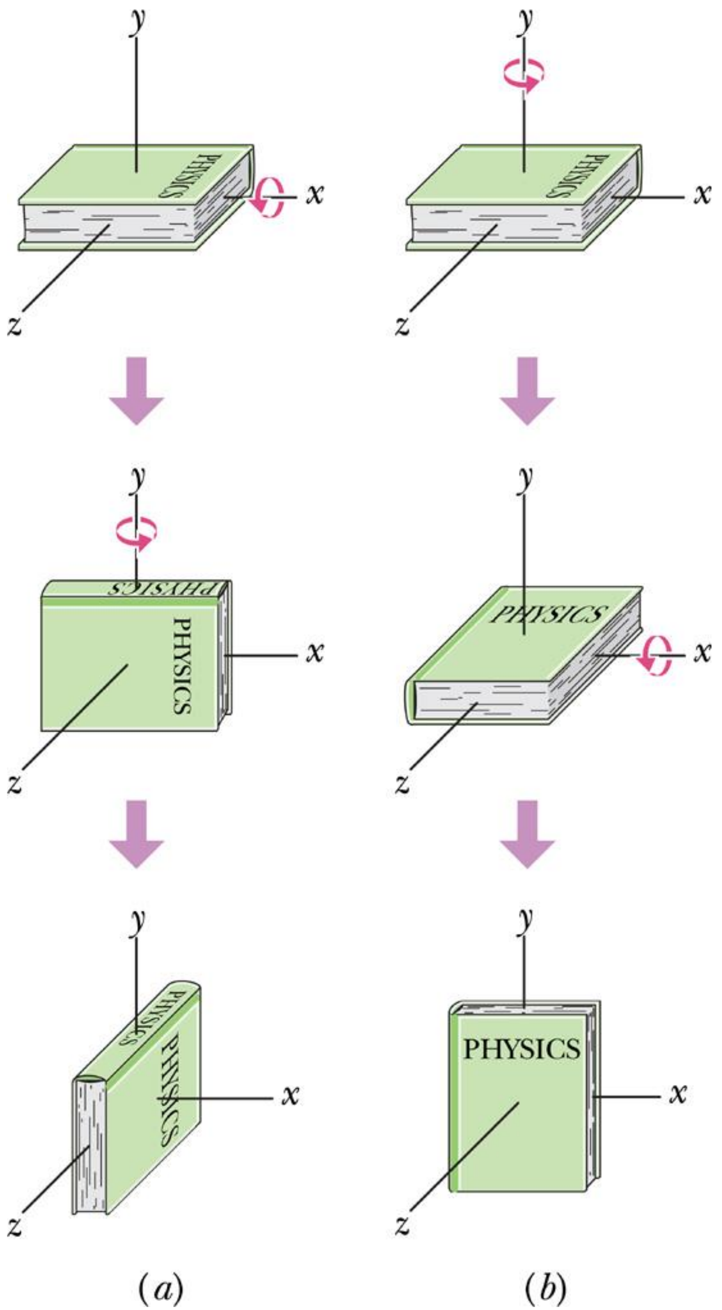
Grandezas angulares são vetores?



(*a*) (*b*) (*c*)

Para rotações de um corpo rígido em torno de um eixo fixo, ω pode ser negativo (rotação horária) ou positiva (rotação anti-horária). O vetor $\vec{\omega}$ está sobre o eixo de rotação e seu sentido é dado pela regra da mão direita.

Atenção:
Deslocamentos angulares não podem ser tratados como vetores pois não obedecem a regra de soma vetorial (a ordem dos vetores seria irrelevante)!



Observem que em 2 movimentos rotacionais subsequentes na figura a ordem da soma dos elementos ((a) e (b)) produz resultados finais diferentes!

A soma vetorial prevê que a ordem dos elementos na soma seria irrelevante, produzindo o mesmo resultado!

Por esta razão deslocamentos angulares não podem ser representados por vetores!

Rotação com aceleração angular constante

Analogamente ao movimento de translação, para aceleração angular α constante pode-se derivar expressões simples para ω e para θ.

Movimento Translacional **Movimento Rotacional**

$$x \leftrightarrow \theta$$

$$v \leftrightarrow \omega$$

$$a \leftrightarrow \alpha$$

$$v = v_0 + at \leftrightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t \qquad \text{(eqs.1)}$$

$$x = x_o + v_o t + \frac{at^2}{2} \leftrightarrow \theta = \theta + \omega_o t + \frac{\alpha t^2}{2} \qquad \text{(eqs.2)}$$

$$v^2 - v_o^2 = 2a\left(x - x_o\right) \leftrightarrow \omega^2 - \omega_o^2 = 2\alpha\left(\theta - \theta_o\right) \qquad \text{(eqs.3)}$$

Exemplo 10-3: Uma pedra de amolar gira com aceleração angular constante $\alpha = 0{,}35\ \text{rad/s}^2$. No instante t = 0, ela tem uma velocidade angular $\omega_0 = -4{,}6$ rad/s e uma reta de referência está na horizontal na posição $\theta_0 = 0$. (a) Em que instante após t = 0 a reta está na posição $\theta = 5{,}0$ rev? (b) Descreva a rotação da pedra entre t = 0 e t = 32 s. (c) Em qual instante t a pedra de amolar para momentaneamente?

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2,$$

porque a única variável desconhecida é o tempo t.

Cálculos: Substituindo valores conhecidos e fazendo $\theta_0 = 0$ e $\theta = 5{,}0$ rev $= 10\pi$ rad, obtemos

$$10\pi\ \text{rad} = (-4{,}6\ \text{rad/s})t + \tfrac{1}{2}(0{,}35\ \text{rad/s}^2)t^2.$$

(Convertemos 5,0 rev para 10π para manter a coerência entre as unidades). Resolvendo esta equação do segundo grau em t, obtemos

$$t = 32\ \text{s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

angular $\omega_0 = -4{,}6$ rad, mas a aceleração angular α é positiva (no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio). Esta oposição inicial entre os sinais da velocidade angular inicial e da aceleração angular significa que a roda gira cada vez mais devagar no sentido negativo, pára momentaneamente e, em seguida, passa a girar no sentido positivo. Depois que a reta de referência passa de volta pela posição inicial $\theta = 0$, a pedra de amolar dá mais 5 voltas completas até o instante $t = 32$ s.

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - (-4{,}6\ \text{rad/s})}{0{,}35\ \text{rad/s}^2} = 13\ \text{s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 10-4: Você está operando um rotor (um brinquedo de parque de diversões com um cilindro giratório), percebe que um ocupante está ficando zonzo e reduz a velocidade do cilindro de 3,40 rad/s para 2,0 rad/s em 20 rev, com aceleração angular constante. (a) Qual é essa aceleração durante a redução da velocidade angular? (b) Em quanto tempo?

$$v = v_0 + at \quad \leftrightarrow \quad \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha},$$

que substituímos na Eq. 10-13 para escrever

$$\theta - \theta_0 = \omega_0\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2.$$

Explicitando α, substituindo os valores conhecidos e convertendo 20 rev para 125,7 rad, obtemos

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2(\theta - \theta_0)} = \frac{(2{,}00\ \text{rad/s})^2 - (3{,}40\ \text{rad/s})^2}{2(125{,}7\ \text{rad})}$$

$$= -0{,}0301\ \text{rad/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Em quanto tempo ocorre a redução de velocidade?

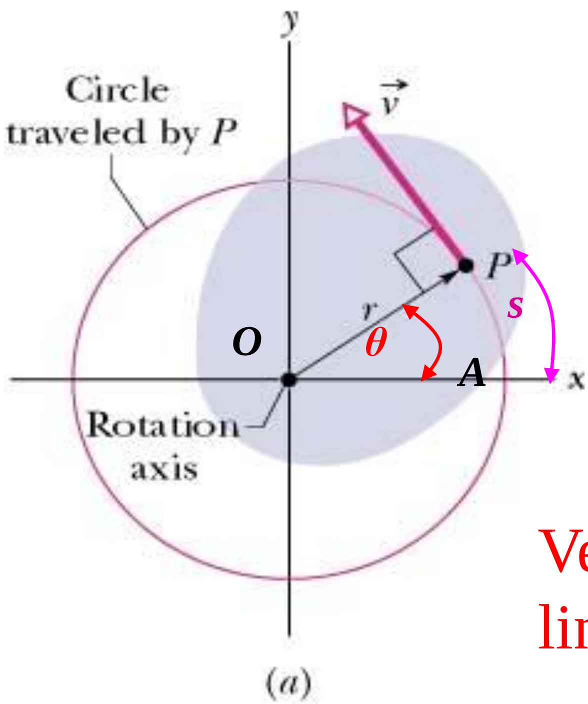
Cálculo: Agora que conhecemos α, podemos usar a Eq. 10-12 para obter t:

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{2{,}00\ \text{rad/s} - 3{,}40\ \text{rad/s}}{-0{,}0301\ \text{rad/s}^2}$$

$$= 46{,}5\ \text{s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

$$\theta = \theta + \omega_o t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

Relacionando variáveis lineares e angulares



Considere-se o ponto P de um corpo rígido localizado a **r** da origem e girando em torno de um eixo fixo em z. No tempo **t**, P se move de **θ** ao longo do arco AP que corresponde a distância **s**.

$$\boldsymbol{s = r\theta}$$

Velocidade linear:

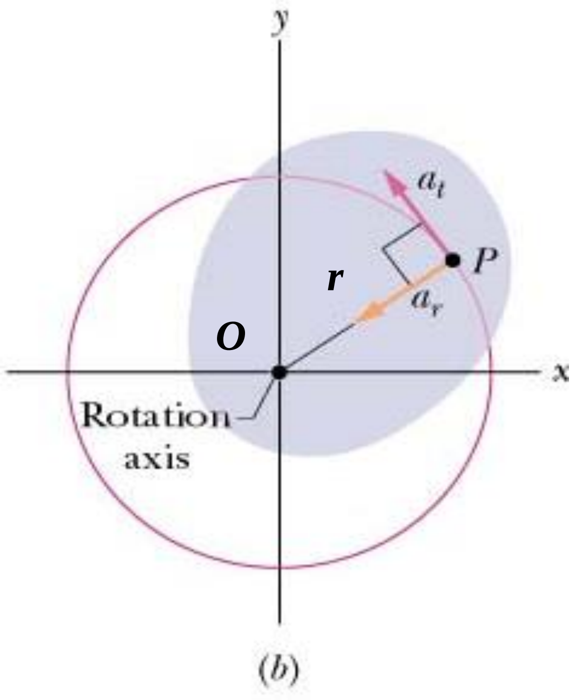
$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(r\theta)}{dt} = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\boxed{v = r\omega}$$

O período da revolução é dado por:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\omega r} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}} \qquad \boxed{T = \frac{1}{f}} \qquad \boxed{\omega = 2\pi f}$$



A aceleração do ponto P é um vetor que tem duas componentes. Uma componente radial ao longo do raio e apontando para O e uma tangencial ao percurso de P

Aceleração radial (centrípeta):

$$\boxed{a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r}$$

Aceleração tangencial: $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} = r\alpha$

$$\boxed{a_t = r\alpha}$$

A magnitude do vetor aceleração é: $a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}$

Exemplo 10-5: Apesar do extremo cuidado que os engenheiros tomam ao projetar uma montanha russa, uns poucos infelizes entre milhões de usuários deste brinquedo são acometidos de um mal conhecido como dor de cabeça de montanha russa. Entre os sintomas, que podem levar vários dias para aparecer, estão vertigens e dores de cabeça, ambas suficientemente severas para exigir tratamento medico. Vamos investigar a causa provável projetando uma montanha russa de indução (que pode ser acelerada por forças magnéticas mesmo em um trilho horizontal). Para provocar uma emoção inicial, queremos que cada passageiro deixe o ponto de embarque com uma aceleração g ao longo da pista horizontal. Para aumentar a emoção, queremos também que a primeira parte dos trilhos forme um arco de circunferência de modo que o passageiro também experimente uma aceleração centrípeta. Quando o passageiro acelera ao longo do arco, o modulo dessa aceleração aumenta de forma assustadora. Quando o modulo a da aceleração resultante atinge 4g em algum ponto P de Angulo θ_P ao longo do arco, queremos que o passageiro se mova em linha reta ao longo de uma tangente de arco. (a) Que Angulo θ_P o arco deve subtender para que a seja 4g no ponto P? (b) Qual é o modulo a da aceleração experimentada pelo passageiro no ponto P e depois de pass

IDÉIAS-CHAVE (1) Em qualquer instante a aceleração resultante $\vec{a}$ do passageiro é a soma vetorial da aceleração tangencial $\vec{a}_t$ ao longo dos trilhos com a aceleração radial $\vec{a}_r$ na direção do centro de curvatura (como na Fig. 10-9*b*).

(2) O valor de a_r em qualquer instante depende da velocidade angular instantânea ω, de acordo com a Eq. 10-23 ($a_r = \omega^2 r$, onde r é o raio do arco de circunferência). (3) A aceleração angular α ao longo do arco está relacionada à aceleração tangencial a_t ao longo dos trilhos através da Eq. 10-22 ($a_t = \alpha_r$). (4) Como a_t e r são constantes, α também é constante e, portanto, podemos usar as equações para aceleração constante.

Cálculos: Como estamos tentando determinar um valor da posição angular θ, vamos escolher, entre as equações para aceleração constante, a Eq. 10-14:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0). \tag{10-24}$$

Para obter a aceleração angular α, usamos a Eq. 10-22:

$$\alpha = \frac{a_t}{r}. \tag{10-25}$$

Fazendo $\omega_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$, obtemos:

$$\omega^2 = \frac{2a_t\theta}{r}. \tag{10-26}$$

Substituindo este resultado na equação

$$a_r = \omega^2 r \tag{10-27}$$

obtemos uma relação entre a aceleração radial, a aceleração tangencial e a posição angular θ:

$$a_r = 2a_t\theta. \tag{10-28}$$

Como $\vec{a}_t$ e $\vec{a}_r$ são vetores perpendiculares, o módulo da soma dos dois vetores é dado por

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_r^2}\,. \tag{10-29}$$

Substituindo a_r por seu valor, dado pela Eq. 10-28, e explicitando θ, temos:

$$\theta = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2}{a_t^2} - 1}\,. \tag{10-30}$$

Quando a atinge o valor desejado, $4g$, o ângulo θ é o ângulo θ_P cujo valor queremos calcular. Fazendo $a = 4g$, $\theta = \theta_P$ e $a_t = g$ na Eq. 10-30, obtemos

$$\theta_P = \tfrac{1}{2}\sqrt{\frac{(4g)^2}{g^2} - 1} = 1{,}94 \text{ rad} = 111°. \qquad \text{(Resposta)}$$

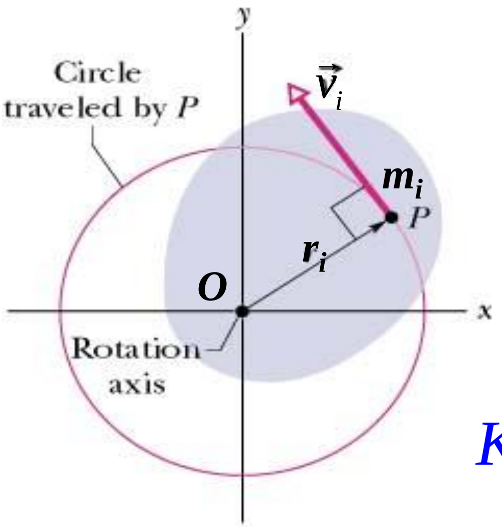
(b) Qual é o módulo a da aceleração experimentada pelo passageiro no ponto P e depois de passar pelo ponto P?

Raciocínio: No ponto P, a tem o valor planejado de $4g$. Depois de passar por P, o passageiro se move em linha reta e a aceleração centrípeta deixa de existir. Assim, o passageiro tem apenas a aceleração de módulo g ao longo dos trilhos e, portanto,

$$a = 4g \text{ em } P \quad \text{e} \quad a = g \text{ depois de } P. \qquad \text{(Resposta)}$$

A dor de cabeça de montanha-russa acontece quando a cabeça de um passageiro sofre uma mudança brusca de aceleração, com altos valores de aceleração antes ou depois da mudança. A razão é que a mudança pode fazer com que o cérebro se mova em relação ao crânio, rompendo os vasos que ligam o crânio ao cérebro. O aumento gradual da aceleração de g para $4g$ entre o ponto inicial e o ponto P pode afetar alguns passageiros, mas é mais provável que a variação abrupta da aceleração de $4g$ para g quando o passageiro passa pelo ponto P provoque uma dor de cabeça de montanha-russa.

Energia Cinética de Rotação



Dividindo as partes do corpo em massas m_1, m_2, m_3, etc, têm-se que a parte em P tem massa m_i

A $K_{cinética}$ total será a soma para todas as partes:

$$K = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}m_3v_3^2 + \ldots \qquad K = \sum_i \frac{1}{2}m_iv_i^2$$

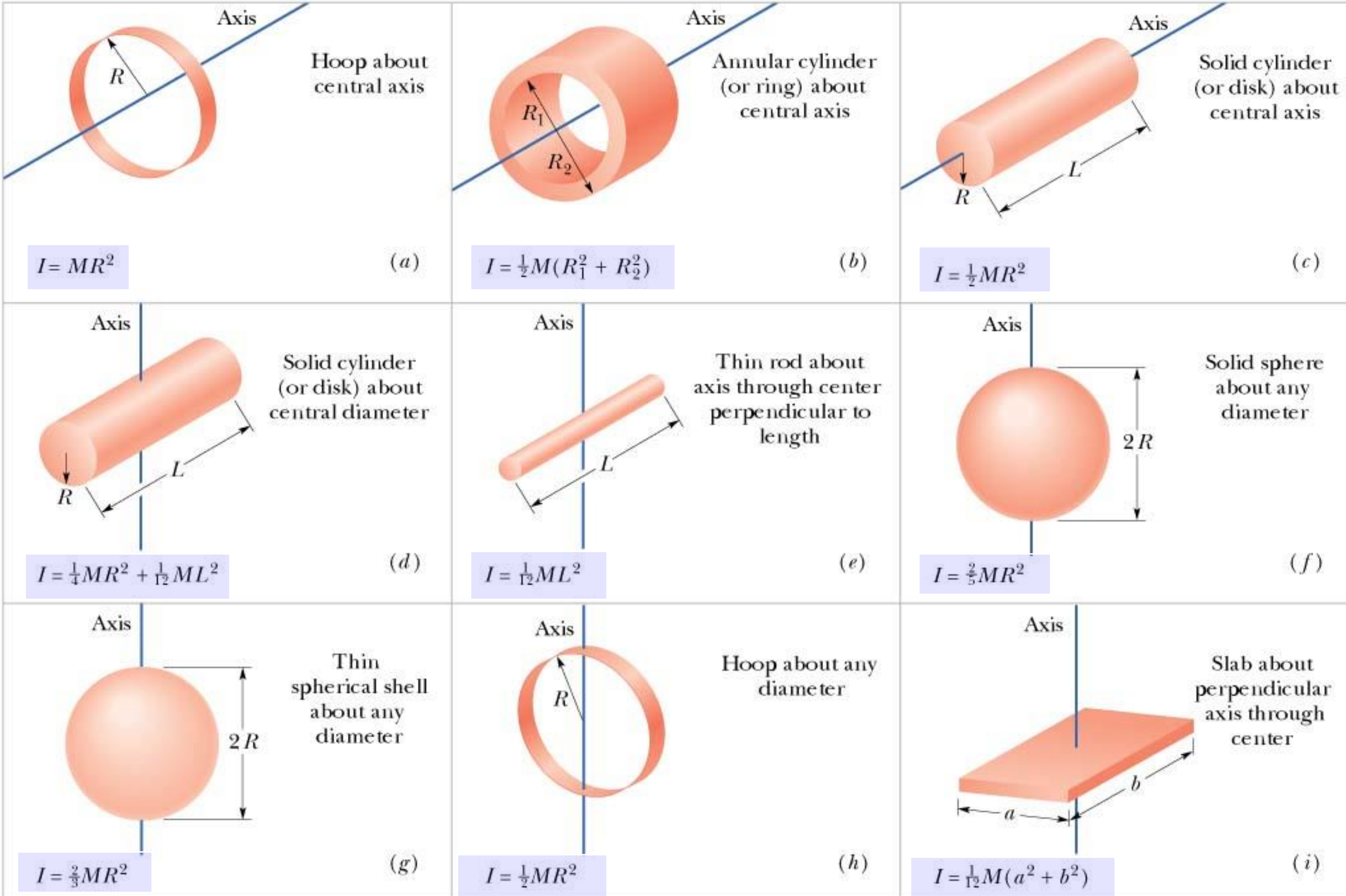
Substituindo acima a velocidade do elemento i, $v_i = \omega r_i \rightarrow K = \sum_i \frac{1}{2}m_i\left(\omega r_i\right)^2$

$$K = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_ir_i^2\right)\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

O momento de inércia (I) descreve como a massa de um objeto se distribue em torno de um eixo de rotação.

$$\boxed{I = \sum_i m_ir_i^2} \qquad \boxed{I = \int r^2dm} \qquad \boxed{K = \frac{1}{2}I\omega^2}$$

Na tabela abaixo estão os momentos de inércia para alguns corpos rígidos



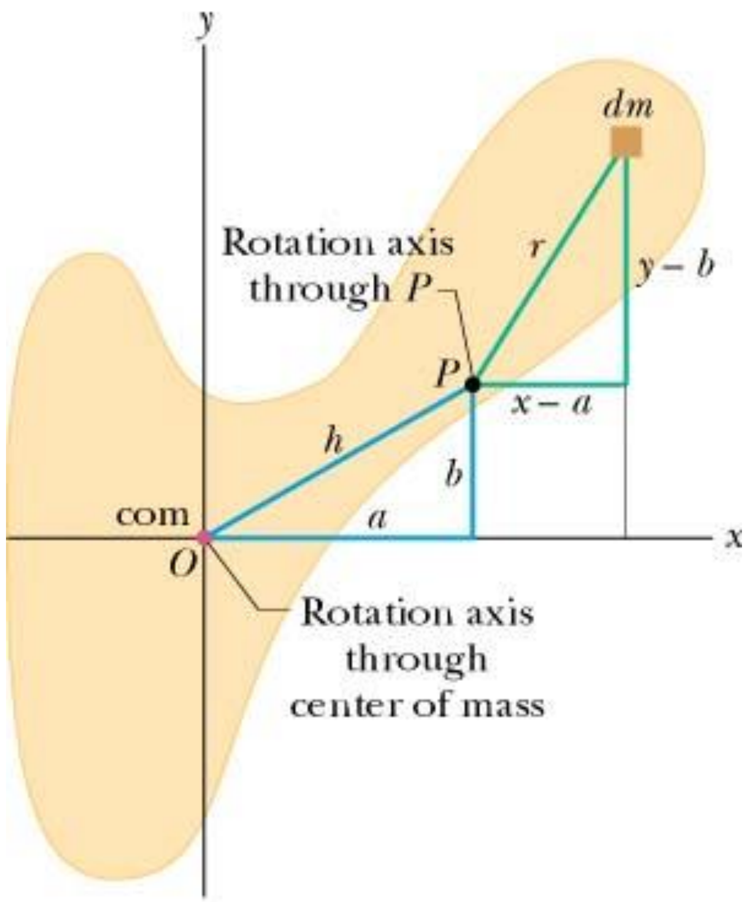
Cálculo do Momento de Inércia Rotacional

$$\boxed{I = \sum_i m_i r_i^2}$$

Corpo rígido com distribuição discreta de massa

$$\boxed{I = \int r^2 dm}$$

Distribuição contínua de massa



Teorema do eixo paralelo

I depende da posição do eixo de rotação. Se o eixo muda, o momento I também muda. Para o corpo rígido ao lado, com massa M, assume-se que se conhece o eixo de rotação que passa pelo centro de massa do corpo I_{cm} perpendicular a página. O momento de inércia do corpo com relação a um eixo que passa por P, distante de h do eixo em O é dado por:

$$\boxed{I = I_{com} + Mh^2}$$

(1) (2) (3) (4)

Exemplo 10-6

A Fig. 10-13*a* mostra um corpo rígido composto por duas partículas de massa m ligadas por uma barra de comprimento L e massa desprezível.

(a) Qual é o momento de inércia I_{CM} em relação a um eixo passando pelo centro de massa e perpendicular à barra, como mostra a figura?

IDÉIA-CHAVE Como temos apenas duas partículas com massa, podemos calcular o momento de inércia I_{CM} do corpo usando a Eq. 10-33.

Cálculos: Para as duas partículas, ambas a uma distância perpendicular $L/2$ do eixo de rotação, temos:

$$I = \sum m_i r_i^2 = (m)(\tfrac{1}{2}L)^2 + (m)(\tfrac{1}{2}L)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}mL^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Qual é o momento de inércia I do corpo em relação a um eixo passando pela extremidade esquerda da barra e paralelo ao primeiro eixo (Fig. 10-13*b*)?

IDÉIAS-CHAVE Esta situação é tão simples que podemos determinar I usando duas técnicas. A primeira é semelhante à que foi usada no item (a). A outra, mais geral, consiste em aplicar o teorema dos eixos paralelos.

Primeira técnica: Calculamos I como no item (a), exceto pelo fato de que agora a distância perpendicular r_i é zero

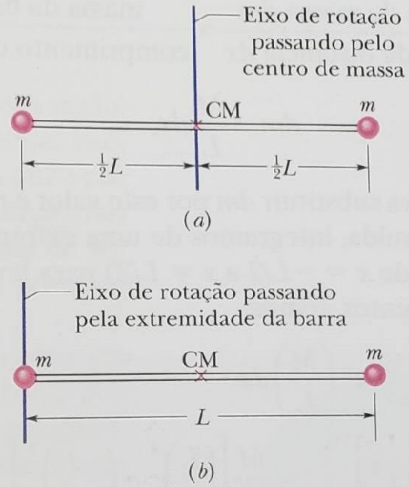


FIG. 10-13 Um corpo rígido composto por duas partículas de massa m unidas por uma barra de massa desprezível.

para a partícula da esquerda e L para a partícula da direita. De acordo com a Eq. 10-33,

$$I = m(0)^2 + mL^2 = mL^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Segunda técnica: Como já conhecemos I_{CM}, o momento de inércia em relação a um eixo que passa pelo centro de massa, e como o eixo especificado é paralelo a esse "eixo CM", podemos usar o teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36). Temos:

$$I = I_{CM} + Mh^2 = \tfrac{1}{2}L^2 + (2m)(\tfrac{1}{2}L)^2$$
$$= mL^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 10-7

A Fig. 10-14 mostra uma barra fina, uniforme, de massa M e comprimento L, sobre um eixo x cuja origem está no centro da barra.

(a) Qual é o momento de inércia da barra em relação a um eixo perpendicular à barra passando pelo seu centro?

IDÉIAS-CHAVE (a) Como a barra é uniforme, seu centro de massa está no centro geométrico. Assim, o momento de inércia pedido é I_{CM}. (2) Como a barra é um objeto contínuo, devemos usar a integral da Eq. 10-35,

$$I = \int r^2\, dm, \tag{10-38}$$

para determinar o momento de inércia.

Cálculos: Como queremos integrar em relação à coordenada x e não em relação à massa m, como na integral da Eq. 10-38, devemos relacionar a massa dm de um elemento da barra a um elemento de distância dx ao longo da barra. (Um desses elementos é mostrado na Fig. 10-14.) Como a barra é uniforme, a razão entre massa e comprimento é a mesma para todos os elementos e para a barra como um todo, de modo que podemos escrever

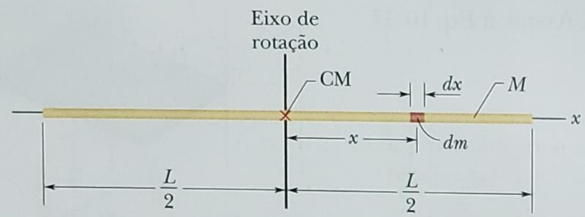


FIG. 10-14 Uma barra uniforme de comprimento L e massa M. Um elemento de massa dm e comprimento dx está representado na figura.

$$\frac{\text{elemento de massa } dm}{\text{elemento de distância } dx} = \frac{\text{massa da barra } M}{\text{comprimento da barra } L}$$

ou

$$dm = \frac{M}{L}\, dx.$$

Podemos agora substituir dm por este valor e r por x na Eq. 10-38. Em seguida, integramos de uma extremidade a outra da barra (de $x = -L/2$ a $x = L/2$) para levar em conta todos os elementos. Temos:

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=-L/2}^{x=+L/2} x^2 \left(\frac{M}{L}\right) dx \\ &= \frac{M}{3L}\Big[x^3\Big]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{M}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right] \\ &= \tfrac{1}{12} ML^2. \end{aligned} \qquad \text{(Resposta)}$$

Este resultado está de acordo com o que aparece na Tabela 10-2e.

(b) Qual é o momento de inércia I da barra em relação a um novo eixo perpendicular à barra passando pela extremidade esquerda?

IDÉIAS-CHAVE Poderíamos calcular I mudando a origem do eixo x para a extremidade esquerda da barra e integrando de $x = 0$ a $x = L$. Entretanto, vamos usar uma técnica mais geral (e mais simples), que envolve o uso do teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36).

Cálculos: Se colocamos o eixo na extremidade esquerda da barra, mantendo-o paralelo ao eixo que passa pelo centro de massa, podemos usar o teorema dos eixos paralelos (Eq. 10-36). De acordo com o item (a), $I_{CM} = ML^2/12$. Como mostra a Fig. 10-14, a distância perpendicular h entre o novo eixo de rotação e o centro de massa é L/2. Substituindo esses valores na Eq. 10-36, temos:

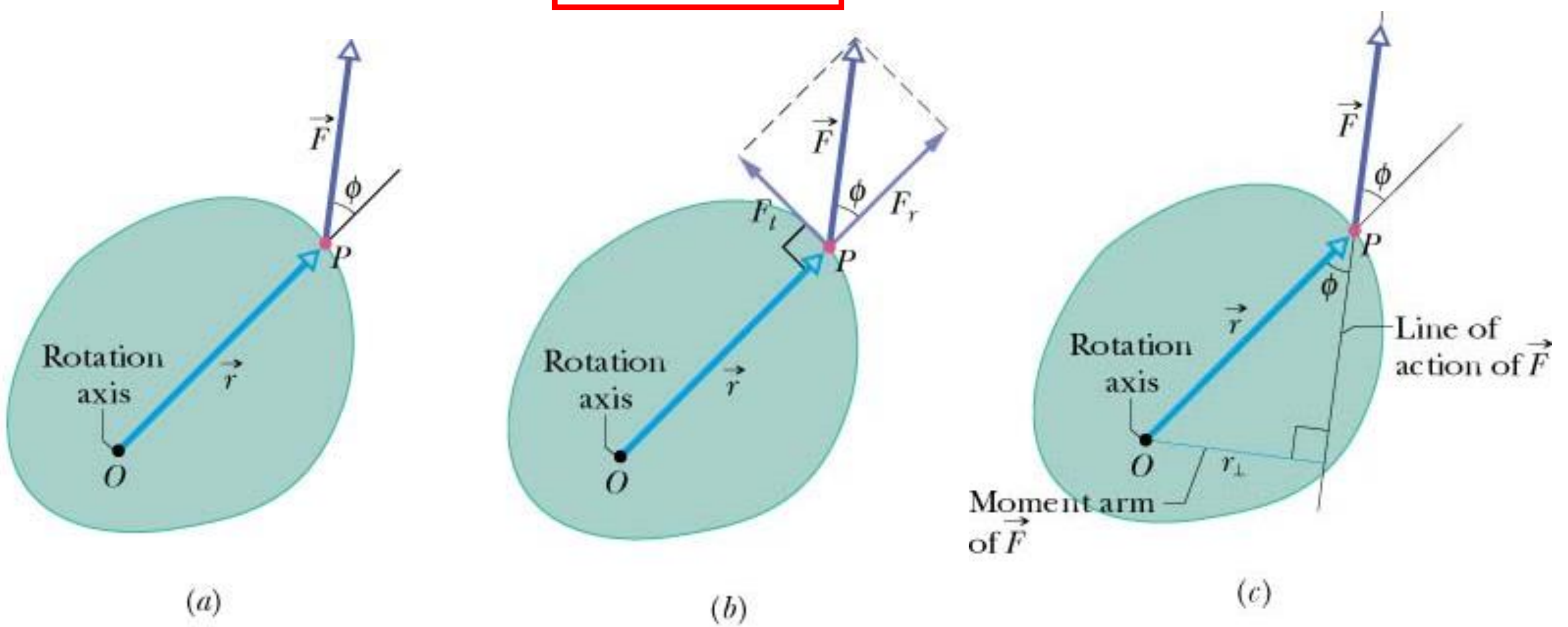
$$\begin{aligned} I = I_{CM} + Mh^2 &= \tfrac{1}{2} ML^2 + (M)(\tfrac{1}{2}L)^2 \\ &= \tfrac{1}{3} ML^2. \end{aligned} \qquad \text{(Resposta)}$$

Na verdade, o mesmo resultado é obtido para qualquer eixo perpendicular à barra passando pela extremidade esquerda ou direita, seja ou não paralelo ao eixo da Fig. 10-14.

Torque

O corpo na figura (a) gira em torno de um eixo em O sob influência de uma força $\vec{F}$ aplicada ao ponto P que dista de $\vec{r}$ do eixo em O. Separando a força em duas componentes radial F_r e tangencial F_t (b), observa-se que a primeira não pode causar rotação por estar sobre a linha que conecta a O. A força tangencial $F_t = Fsen\phi$ causa rotação! O torque é $\tau = rFsen\phi = rF_t$:

$$\boxed{\tau = r_\perp F}$$



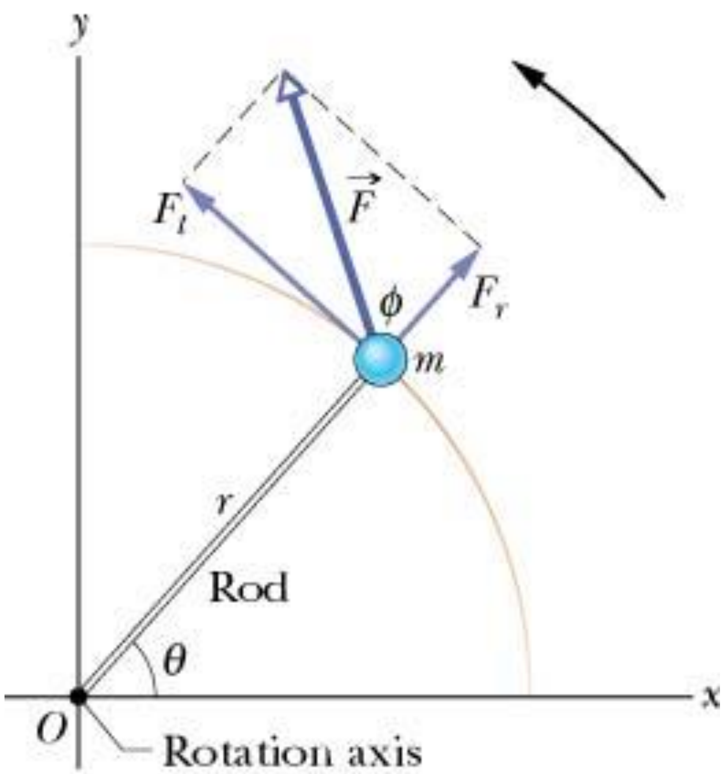
Segunda Lei de Newton para a Rotação

Movimento Translacional:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{ma}$$

Movimento Rotacional:

$$\boxed{\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{I\alpha}}$$



Para um corpo rígido com massa pontual *m* girando em torno de *O*:

$$F_t = ma_t$$

$$\tau = F_t r$$

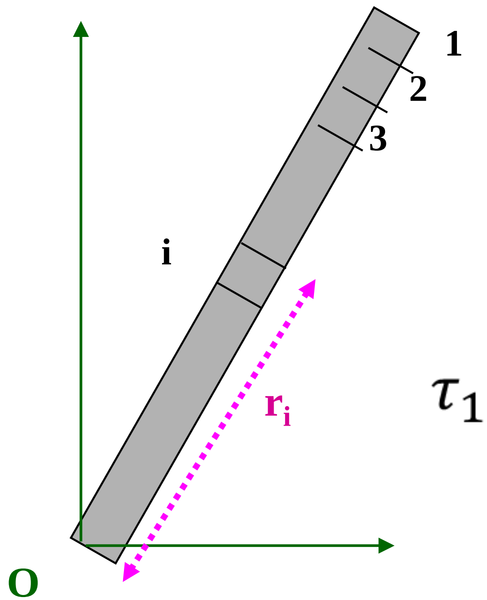
$$\tau = ma_t r = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha$$

$$\tau = I\alpha$$

Segunda Lei de Newton para a Rotação

Vamos agora derivar a mesma equação para um caso mais geral:

Considere-se a haste da figura que pode girar em torno de um eixo em O sob influência de um torque resultante τ_{res}. Dividindo o corpo em partes ou "elementos" com massas m_1, m_2, m_3,…,m_n localizadas nas distâncias r_1, r_2, r_3,…r_n de O, aplicamos a 2a Lei de Newton para cada elemento:



$$\tau_1 = I_1\alpha, \quad \tau_2 = I_2\alpha, \quad \tau_3 = I_3\alpha, \quad \text{etc.}$$

Se adicionarmos todas essas equações:

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_3 + \cdots \tau_n = I_1\alpha + I_2\alpha + I_3\alpha + \cdots, I_n\alpha$$

$$\tau_{res} = (I_1 + I_2 + I_3 + \cdots, I_n)\alpha$$

$$\boxed{\tau_{res} = I\alpha}$$

sua capacidade

A Fig. 10-18*a* mostra um disco uniforme, de massa $M = 2{,}5$ kg e raio $R = 20$ cm, montado em um eixo horizontal fixo. Um bloco de massa $m = 1{,}2$ kg está pendurado por uma corda de massa desprezível que está enrolada na borda do disco. Determine a aceleração do bloco em queda, a aceleração angular do disco e a tensão na corda. A corda não escorrega e não existe atrito no eixo.

IDÉIAS-CHAVE (1) Considerando o bloco como um sistema, podemos relacionar sua aceleração a às forças que agem sobre ele através da segunda lei de Newton ($\vec{F}_{res} = m\vec{a}$). (2) Considerando o disco como um sistema, podemos relacionar sua aceleração angular α ao torque que age sobre ele através da segunda lei de Newton para rotações ($\tau_{res} = I\alpha$). (3) Para combinar os movimentos do bloco e do disco, usamos o fato de que a aceleração linear a do bloco e a aceleração linear (tangencial) a_t da borda do disco são iguais.

Forças que agem sobre o bloco: Essas forças estão representadas no diagrama de corpo livre do bloco (Fig. 10-18*b*): A força da corda é $\vec{T}$ e a força gravitacional é $\vec{F}_g$, de módulo mg. Podemos escrever a segunda lei de Newton para as componentes ao longo de um eixo vertical y ($F_{res,y} = ma_y$) como

$$T - mg = ma. \tag{10-46}$$

Entretanto, não podemos obter o valor de a usando apenas essa equação, porque ela também contém a incógnita T.

Torque exercido sobre o disco: Anteriormente, quando esgotávamos as possibilidades com o eixo y passávamos para o eixo x; aqui passamos para a rotação do disco. Para

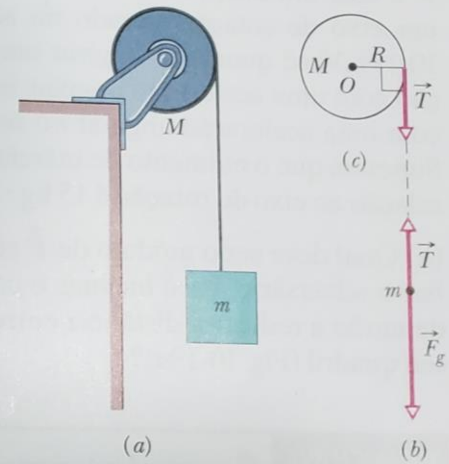


FIG. 10-18 (*a*) O corpo em queda faz o disco girar. (*b*) Diagrama de corpo livre do bloco. (*c*) Diagrama de corpo livre incompleto do disco.

calcular os torques e o momento de inércia I usamos o fato de que o eixo de rotação é perpendicular ao disco e passa pelo seu centro, o ponto O da Fig. 10-18*c*.

Nesse caso, os torques são dados pela Eq. 10-40 ($\tau = rF_t$). A força gravitacional e a força do eixo agem sobre o centro do disco e, portanto, a uma distância $r = 0$, de modo que o torque produzido por essas forças é nulo. A força $\vec{T}$ exercida pela corda sobre o disco age a uma distância $r = R$ do eixo e é tangente à borda do disco. Assim, a força produz um torque $-RT$, negativo porque o torque tende a fazer o disco girar no sentido horário. De acordo com a Tabela 10-2*c*, o momento de inércia I do disco é $MR^2/2$. Assim, podemos escrever a equação $\tau_{res} = I\alpha$ na forma

$$-RT = \tfrac{1}{2} MR^2 \alpha. \tag{10-47}$$

Esta equação pode parecer inútil porque tem duas incógnitas, α e T, nenhuma das quais é a incógnita a cujo valor queremos determinar. Entretanto, com a persistência que é a marca registrada dos físicos, conseguimos torná-la útil quando nos lembramos de um fato: como a corda não escorrega, a aceleração linear a do bloco e a aceleração linear (tangencial) a_t de um ponto na borda do disco são iguais. Nesse caso, de acordo com a Eq. 10-22 ($a_t = \alpha r$), vemos que $\alpha = a/R$. Substituindo este valor na Eq. 10-47, obtemos:

$$T = -\tfrac{1}{2} Ma. \tag{10-48}$$

Combinação dos resultados: Combinando as Eqs. 10-46 e 10-48, temos:

$$a = -g\frac{2m}{M+2m} = -(9{,}8\ \text{m/s}^2)\frac{(2)(1{,}2\ \text{kg})}{2{,}5\ \text{kg}+(2)(1{,}2\ \text{kg})}$$

$$= -4{,}8\text{m/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Podemos usar a Eq. 10-48 para calcular T:

$$T = -\tfrac{1}{2}Ma = -\tfrac{1}{2}(2{,}5\ \text{kg})(-4{,}8\text{m/s}^2)$$

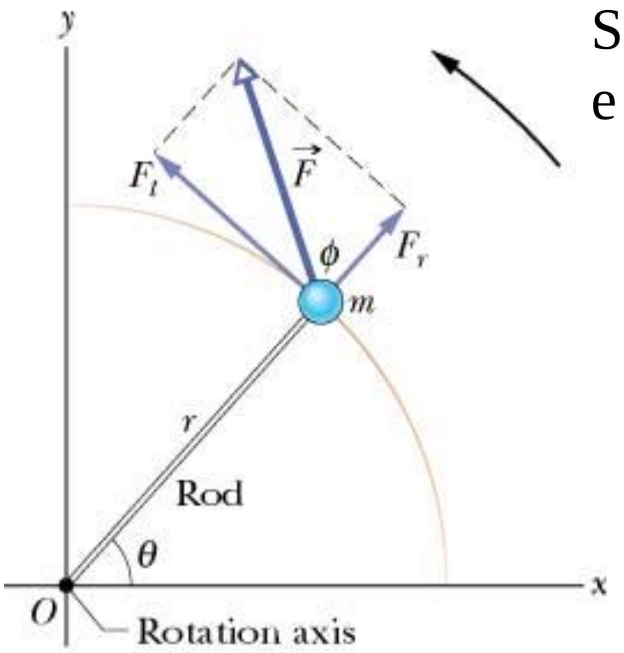
$$= 6{,}0\ \text{N}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como seria de se esperar, a aceleração a do bloco que cai é menor que g e a tensão T da corda (= 6,0 N) é menor que a força gravitacional que age sobre o bloco (= mg = 11,8 N). Vemos também que a e T dependem da massa do disco, mas não do seu raio. A título de verificação, notamos que as expressões obtidas se reduzem $a = -g$ e $T = 0$ para o caso de um disco de massa desprezível ($M = 0$). Isso é razoável; nesse caso, o bloco simplesmente cai em queda livre. De acordo com a Eq. 10-22, a aceleração angular do disco é

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{-4{,}8\ \text{m/s}^2}{0{,}20\ \text{m}} = -24\ \text{rad/s}^2. \qquad \text{(Resposta)}$$

Trabalho e Energia Cinética de Rotação

Se uma força exerce trabalho W* sobre um objeto, isto resulta em uma mudança em sua energia cinética $\Delta K = W$. De maneira similar, quando um torque exerce W em um corpo rígido em rotação, temos que: $\boxed{W = \Delta K}$



Sistema simples com massa m girando em torno de O e haste de massa desprezível e comprimento r:

$W = \vec{F} \cdot \vec{d}$

ds$= rd\theta$

$\tau = F_t r$

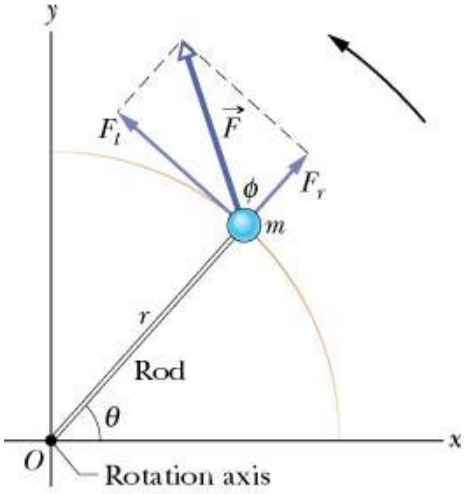
$$dW = F_t r d\theta = \tau d\theta$$

$$W = \int F_t r d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta.$$

$$\Delta K = W = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m r^2 \omega_f^2 - \frac{1}{2} m r^2 \omega_i^2$$

$$\boxed{\Delta K = \frac{1}{2} I \omega_f^2 - \frac{1}{2} I \omega_i^2} \qquad \boxed{W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta}$$

*Trabalho realizado por uma força constante em translação: $W = \vec{F} . \vec{d}$



Potência:

Taxa na qual trabalho é feito por uma força (ou torque).

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau d\theta) = \tau \frac{d\theta}{dt} = \tau\omega \quad (\text{Compare with } P = Fv)$$

Equações importantes do teorema trabalho-energia cinética rotacional

$$\boxed{W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta}$$

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i)$$ Para torque constante

$$\boxed{W = \Delta K = \frac{1}{2} I\omega_f^2 - \frac{1}{2} I\omega_i^2}$$

Teorema Trabalho-Energia Cinética de rotação

$$\boxed{P = \tau\omega}$$

Exemplo 10-11

Suponha que o disco do Exemplo 10-9 e da Fig. 10-18 parte do repouso no instante $t = 0$. Qual é a energia cinética de rotação K no instante $t = 2,5$ s?

IDÉIA-CHAVE Podemos calcular K usando a Eq. 10-34 ($K = \frac{1}{2} I\omega^2$). Já sabemos que $K = \frac{1}{2} MR^2$, mas ainda não conhecemos o valor de ω no instante $t = 2,5$ s. Como, porém, a aceleração angular α tem o valor constante de -24 rad/s^2, podemos aplicar as equações para aceleração angular constante na Tabela 10-1.

Cálculos: Como estamos interessados em determinar ω e conhecemos α e ω_0 ($= 0$), usamos a Eq. 10-12:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t = \alpha t.$$

Fazendo $\omega = \alpha t$ e $I = \frac{1}{2} MR^2$ na Eq. 10-34, obtemos

$$K = \tfrac{1}{2} I\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2} MR^2)(\alpha t)^2 = \tfrac{1}{4} M(R\alpha t)^2$$
$$= \tfrac{1}{4}(2,5 \text{ kg})[(0,20 \text{ m})(-24 \text{ rad/s}^2)(2,5 \text{ s})]^2$$
$$= 90 \text{ J.} \qquad \text{(Resposta)}$$

IDÉIA-CHAVE Também podemos obter essa resposta calculando a energia cinética do disco a partir do trabalho realizado sobre o disco.

Cálculos: Primeiro, relacionamos a *variação* da energia cinética do disco ao trabalho total W realizado sobre o disco, usando o teorema do trabalho e energia cinética ($K_f - K_i = W$). Substituindo K_f por K e K_i por 0, obtemos

$$K = K_i + W = 0 + W = W. \qquad (10\text{-}60)$$

Em seguida, precisamos calcular o trabalho W. Podemos relacionar W aos torques que atuam sobre o disco usando a Eq. 10-53 ou a 10-54. O único torque que produz aceleração angular e realiza trabalho é o torque devido à força $\vec{T}$ da corda sobre o disco. De acordo com o Exemplo 10-9, este torque é igual a $-TR$. Como α é constante, este torque também é constante. Assim, podemos usar a Eq. 10-54 para escrever

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) = -TR(\theta_f - \theta_i). \qquad (10\text{-}61)$$

Como α é constante, podemos usar a Eq. 10-13 para calcular $\theta_f - \theta_i$. Com $\omega_i = 0$, temos:

$$\theta_f - \theta_i = \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = \tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$

Podemos substituir este valor na Eq. 10-61 e substituir o resultado na Eq. 10-60. Com $T = 6,0$ N e $\alpha = -24$ rad/s^2 (de acordo com o Exemplo 10-9), temos:

$$K = W = -TR(\theta_f - \theta_i) = -TR(\tfrac{1}{2}\alpha t^2) = -\tfrac{1}{2}TR\alpha t^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(6,0 \text{ N})(0,20 \text{ m})(-24 \text{ rad/s}^2)(2,5 \text{ s})^2$$
$$= 90 \text{ J.} \qquad \text{(Resposta)}$$

Exemplo 10-12

Uma chaminé cilíndrica começa a tombar quando sua base é danificada. Trate a chaminé como uma barra fina da comprimento $L = 55{,}0$ m (Fig. 10-20*a*). Qual é sua velocidade angular ω no instante em que faz um ângulo $\theta = 35{,}0°$ com a vertical?

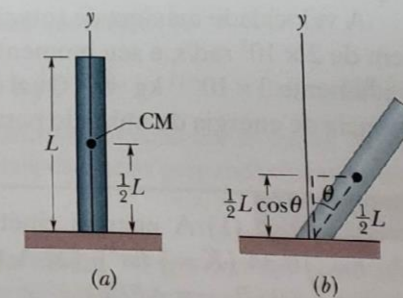


FIG. 10-20 (*a*) Uma chaminé cilíndrica. (*b*) A altura do centro de massa é determinada com o auxílio de um triângulo retângulo.

IDÉIAS-CHAVE (1) Durante a rotação, a energia mecânica (soma da energia cinética de rotação K com a energia po-

tencial gravitacional U) não varia. (2) A energia cinética de rotação é dada pela Eq. 10-34 ($K = \frac{1}{2} I\omega^2$).

Conservação da energia mecânica: Na queda da chaminé, a energia potencial gravitacional U é progressivamente convertida em energia cinética de rotação K, mas a energia total não varia. Podemos expressar este fato através da equação

$$K_f + U_f = K_i + U_i. \tag{10-62}$$

Energia cinética de rotação: A energia cinética de rotação K é inicialmente zero, mas seu valor em instantes posteriores ($= \frac{1}{2} I\omega^2$) depende do momento de inércia I. De acordo com a Tabela 2, no caso de uma barra fina girando em torno do centro de massa (ou seja, em torno do centro), $I_{CM} = \frac{1}{12} mL^2$, onde m é a massa da barra e L é o comprimento da barra. No nosso caso, a chaminé gira em torno de uma das extremidades, que fica a uma distância $L/2$ do centro de massa. De acordo com o teorema dos eixos paralelos, temos:

$$I = \frac{1}{12} mL + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} mL^2. \tag{10-63}$$

Substituindo este valor na equação $K = \frac{1}{2} I\omega^2$, obtemos

$$K_f = \frac{1}{2}(\tfrac{1}{3} mL^2)\omega^2. \tag{10-64}$$

Energia potencial: A energia potencial U ($= mgy$) depende da altura de cada segmento da chaminé. Entretanto, podemos calcular U supondo que toda a massa está concentrada no centro de massa da chaminé, que se encontra inicialmente na altura $L/2$. Assim, a energia potencial inicial é

$$U_i = \tfrac{1}{2} mgL. \tag{10-65}$$

Quando a chaminé tomba de um ângulo θ, a Fig. 10-20*b* mostra que o centro de massa está a uma altura igual a $\frac{1}{2}L$. A energia potencial nesse instante é

$$U_f = \tfrac{1}{2} mgL \cos\theta. \tag{10-66}$$

Velocidade angular: Substituindo as Eqs. 10-66, 10-65 e 10-64 na Eq. 10-62, fazendo $K_i = 0$ e explicitando ω, obtemos

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1 - \cos\theta)} = \sqrt{\frac{3(9{,}8\ \text{m/s}^2)}{55{,}0\ \text{m}}(1 - \cos 35{,}0°)}$$

$$= 0{,}311\ \text{rad/s}. \qquad \text{(Resposta)}$$

Comentários: Como a parte de baixo da chaminé tende a girar mais depressa que a parte de cima, é provável que a chaminé se quebre em duas partes durante a queda, com a parte de cima ficando para trás em relação à parte de baixo.

Analogias entre movimento translacional e rotacional

$$x \leftrightarrow \theta$$

$$v \leftrightarrow \omega$$

$$a \leftrightarrow \alpha$$

$$v = v_0 + at \leftrightarrow \omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$x = x_o + v_o t + \frac{at^2}{2} \leftrightarrow \theta = \theta_o + \omega_o t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$v^2 - v_o^2 = 2a\left(x - x_o\right) \leftrightarrow \omega^2 - \omega_o^2 = 2\alpha\left(\theta - \theta_o\right)$$

$$K = \frac{mv^2}{2} \leftrightarrow K = \frac{I\omega^2}{2}$$

$$m \leftrightarrow I$$

$$F = ma \leftrightarrow \tau = I\alpha$$

$$F \leftrightarrow \tau$$

$$P = Fv \leftrightarrow P = \tau\omega$$