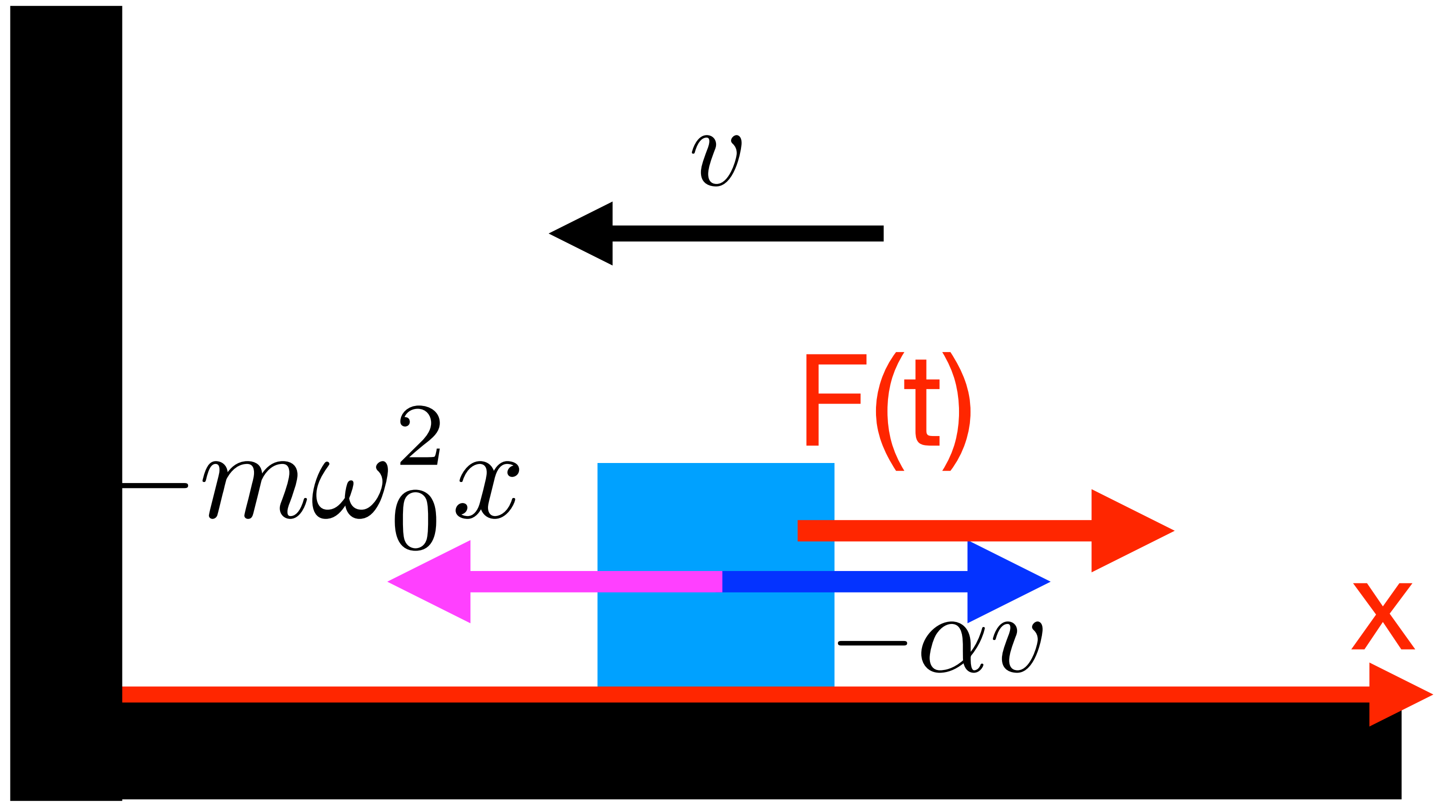
Oscilador Harmônico Forçado

quarta aula

Oscar Éboli / Raul Abramo

1. Equações diferenciais não homogêneas

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x - \alpha\frac{dx}{dt} + F(t) \Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{F(t)}{m}$$



Fato sobre a EDO $\quad a\dfrac{d^2x}{dt^2} + b\dfrac{dx}{dt} + cx = F(t)$

a solução geral é uma solução particular somada a solução mais geral da homogênea

$$x_p(t) \quad \text{tal que} \quad a\frac{d^2x_p}{dt^2} + b\frac{dx_p}{dt} + cx_p = F(t)$$

$x(t) = x_p(t) + c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$ onde $x_{1,2}$ são soluções l.i. de $a\dfrac{d^2x}{dt^2} + b\dfrac{dx}{dt} + cx = 0$

Exemplo 2. Força externa $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$

A equação de movimento é $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \gamma \dfrac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \dfrac{F_0}{m}\cos(\omega t)$

note que $F_0 \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left[F_0 e^{i\omega t}\right]$ logo é útil escrever $\mathrm{z(t) = x(t) + i\ y(t)}$

$$x(t) = \mathrm{Re}\left[z(t)\right] \Longrightarrow \frac{d^2}{dt^2}\mathrm{Re}\left[z(t)\right] + \gamma \frac{d}{dt}\mathrm{Re}\left[z(t)\right] + \omega_0^2 \mathrm{Re}\left[z(t)\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{F_0}{m} e^{i\omega t}\right]$$

como a parte real comuta com a derivada, podemos procurar z(t) que satisfaz

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$$

- Solução particular de $$\frac{d^2z}{dt^2} + \gamma\frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

- Já que a derivada de uma exponencial é proporcional a ela: $z(t) = z_0 e^{i\omega t}$

- implicando que $$(i\omega)^2 z_0 e^{i\omega t} + \gamma i\omega z_0 e^{i\omega t} + \omega_0^2 z_0 e^{i\omega t} = \frac{F_0}{m}e^{i\omega t}$$

$$(-\omega^2 + \omega_0^2 + i\gamma\omega)z_0 = \frac{F_0}{m}$$

$$z_0 = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

Escrevendo $$z_0 = Ae^{i\varphi} = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

temos $$A^2 = \frac{F_0^2}{m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)}$$

Além disso $$Ae^{i\varphi} = \frac{F_0}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)}\ (\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega) \Longrightarrow \tan\varphi = -\frac{\gamma\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

logo $$x_p = \mathrm{Re}[z(t)] = A(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

Ou podemos escrever $$x_p(t) = \frac{F_0}{m((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)}\ \left[(\omega_0^2 - \omega^2)\cos(\omega t) + \gamma\omega\sin(\omega t)\right]$$

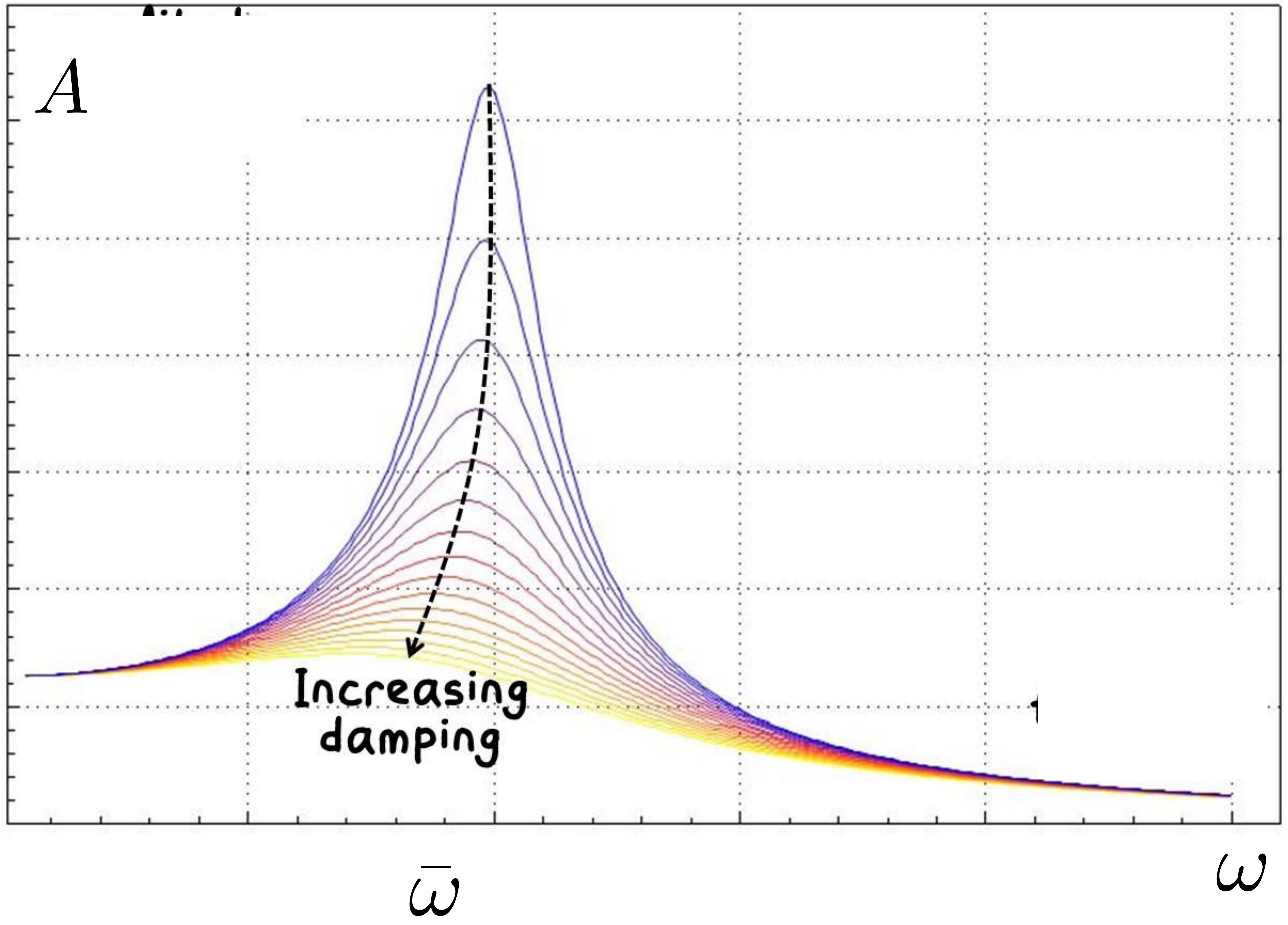
• Efeito físico: ressonância

O módulo da amplitude $A^2 = \dfrac{F_0^2}{m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)}$ é **máximo** para $\bar{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \dfrac{\gamma^2}{2}}$

com amplitude máxima

$A_{\max} = A(\bar{\omega})$ dado por:

$$A_{\max} = \frac{F_0}{m\gamma} \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}$$

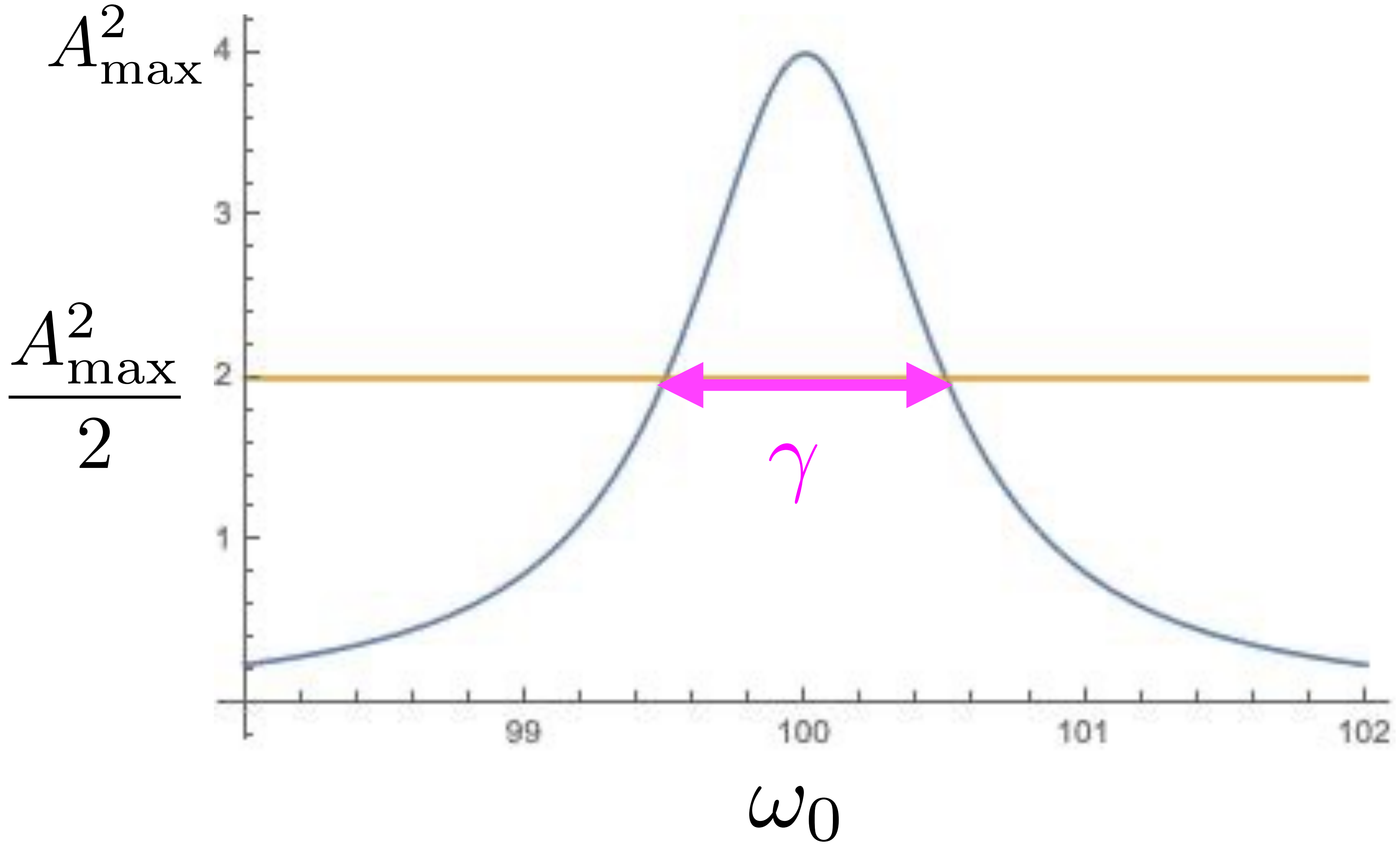


• Foquemos no caso de amortecimento *fraco* $\frac{\gamma}{2} << \omega_0 \Longrightarrow \bar{\omega} \simeq \omega_0$

na região $|\omega - \omega_0| << \omega_0$ temos $\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \simeq 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ e $\omega_0^2 = \omega^2$

$$A^2 = \frac{F_0^2}{m^2((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2)} \Longrightarrow A^2 \simeq \left(\frac{F_0}{2m\omega_0}\right)^2 \frac{1}{\left((\omega_0 - \omega)^2 + \frac{\gamma^2}{4}\right)}$$

e $A_{\max} = \dfrac{F_0}{m\omega_0\gamma}$



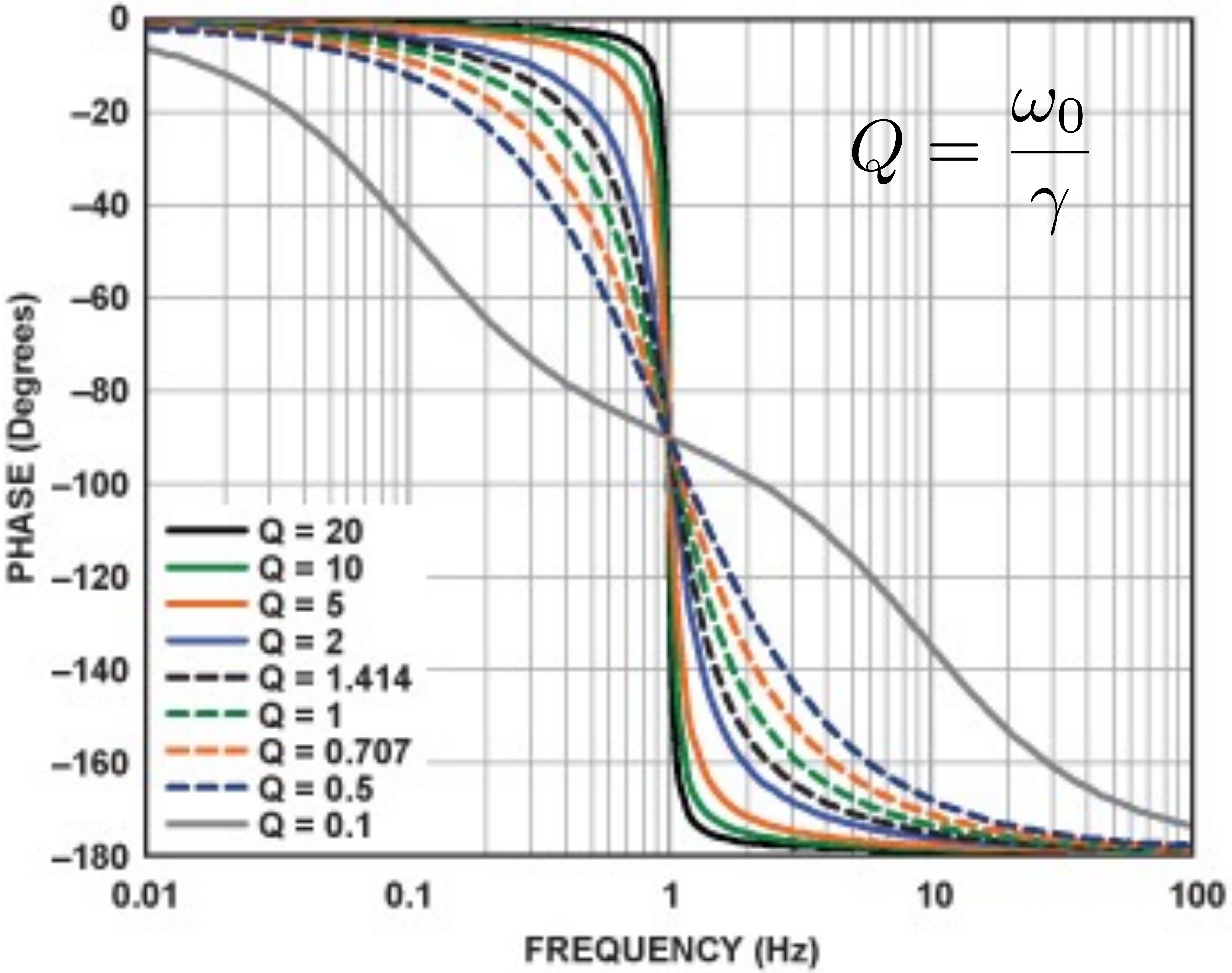
Note que $\dfrac{A(\omega_0)}{A(0)} = \dfrac{\omega_0}{\gamma} = Q$

analogamente $\tan\varphi = -\dfrac{\gamma\omega}{\omega_0^2-\omega^2} \Longrightarrow \tan\varphi = -\dfrac{\gamma}{2(\omega_0-\omega)}$ para $|\omega-\omega_0| << \omega_0$

$$\text{No limite } \ \omega \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi \to -\frac{\gamma\omega}{\omega_0^2} \quad \text{basicamente em fase}$$

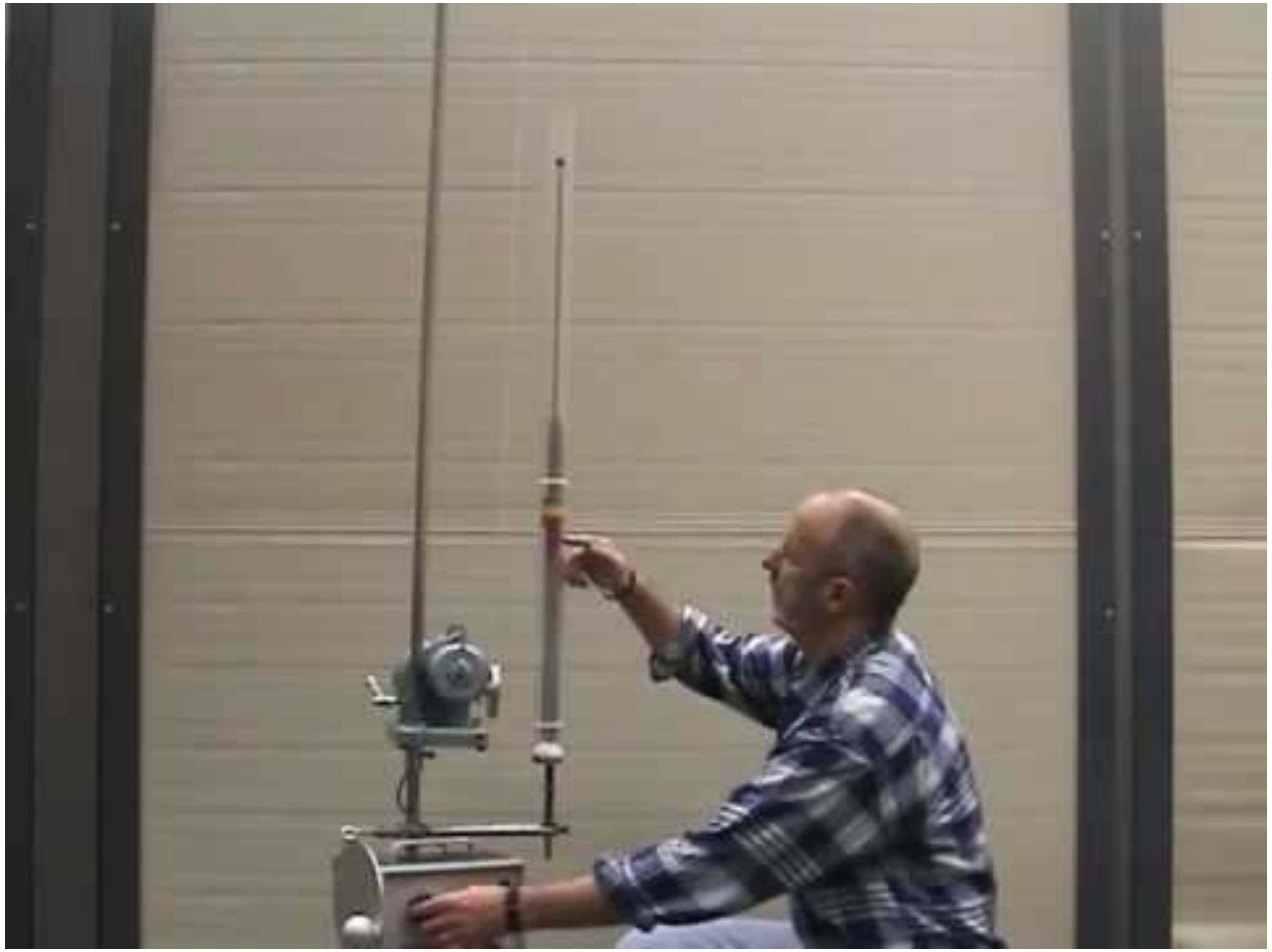
$$\text{No limite } \ \omega \to \bar{\omega} \simeq \omega_0 \quad \Longrightarrow \quad \varphi \to -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{No limite } \ \omega \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \varphi \to -\pi - \frac{\gamma}{\omega}$$



$$Q = \frac{\omega_0}{\gamma}$$

- Vejamos os diversos regimes de frequência em ação



https://www.youtube.com/watch?v=FvtwYwTRJq0

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$$

Solução total (caso subcrítico):

- A solução geral do problema é $$x(t) = x_p(t) + e^{-\frac{\gamma}{2}t}[c_1\cos(\omega_1 t) + c_2\sin(\omega_1 t)]$$

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m((\omega_0^2-\omega^2)^2+\gamma^2\omega^2)}\ \left[(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\omega t) + \gamma\omega\sin(\omega t)\right]$$

a solução da homogênea vai a zero para tempos grandes e é chamada de transiente, enquanto a particular é chamada de estacionária.

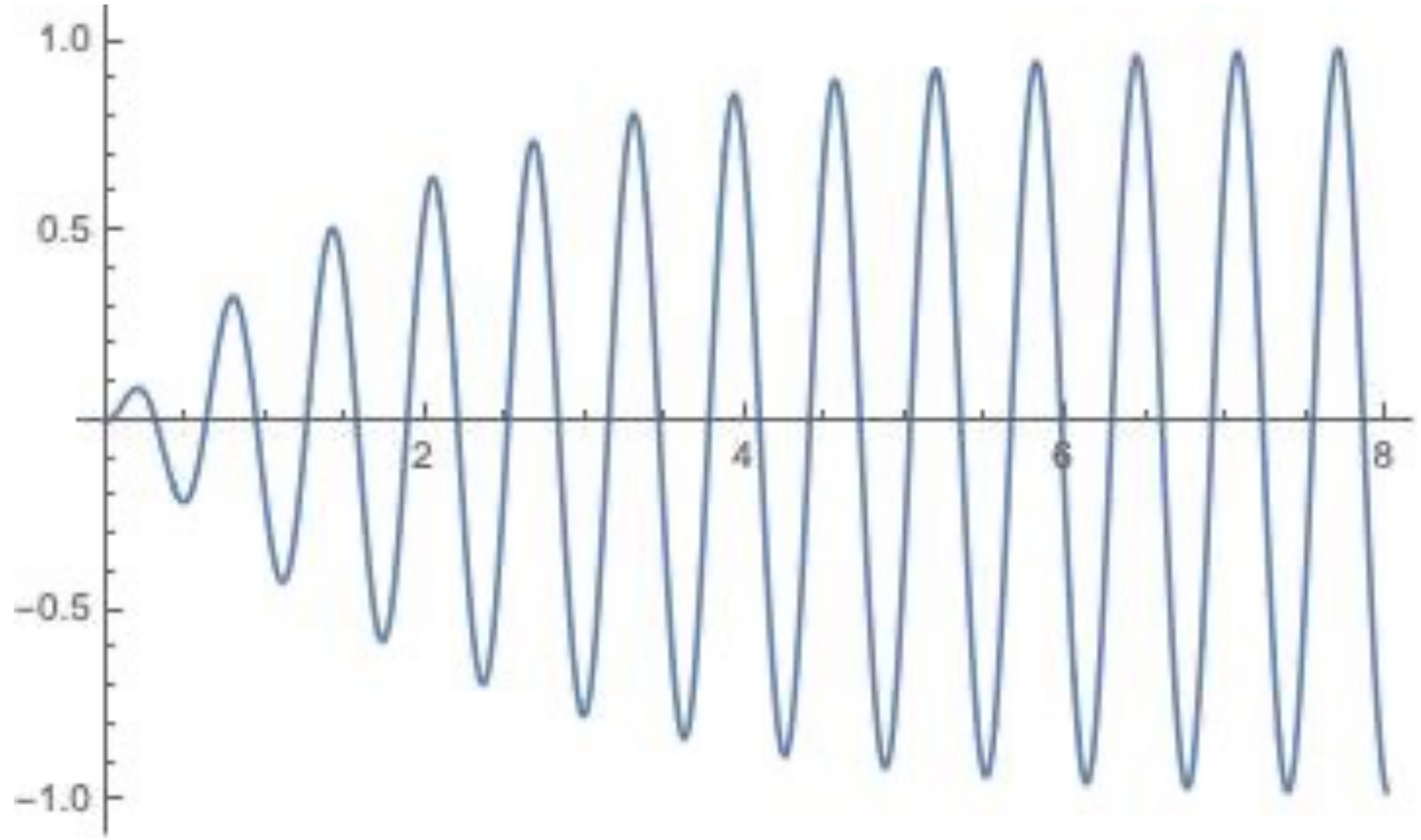
- Dadas a posição e a velocidade iniciais podemos determinar as constantes c's
- Consideremos um caso bem particular: $\omega_0^2 >> \dfrac{\gamma^2}{4} \Longrightarrow \omega_1 \simeq \omega_0$ e $\omega = \bar{\omega} \simeq \omega_0$

  com a condição inicial $x(0) = x_0$ e $v(0) = 0$

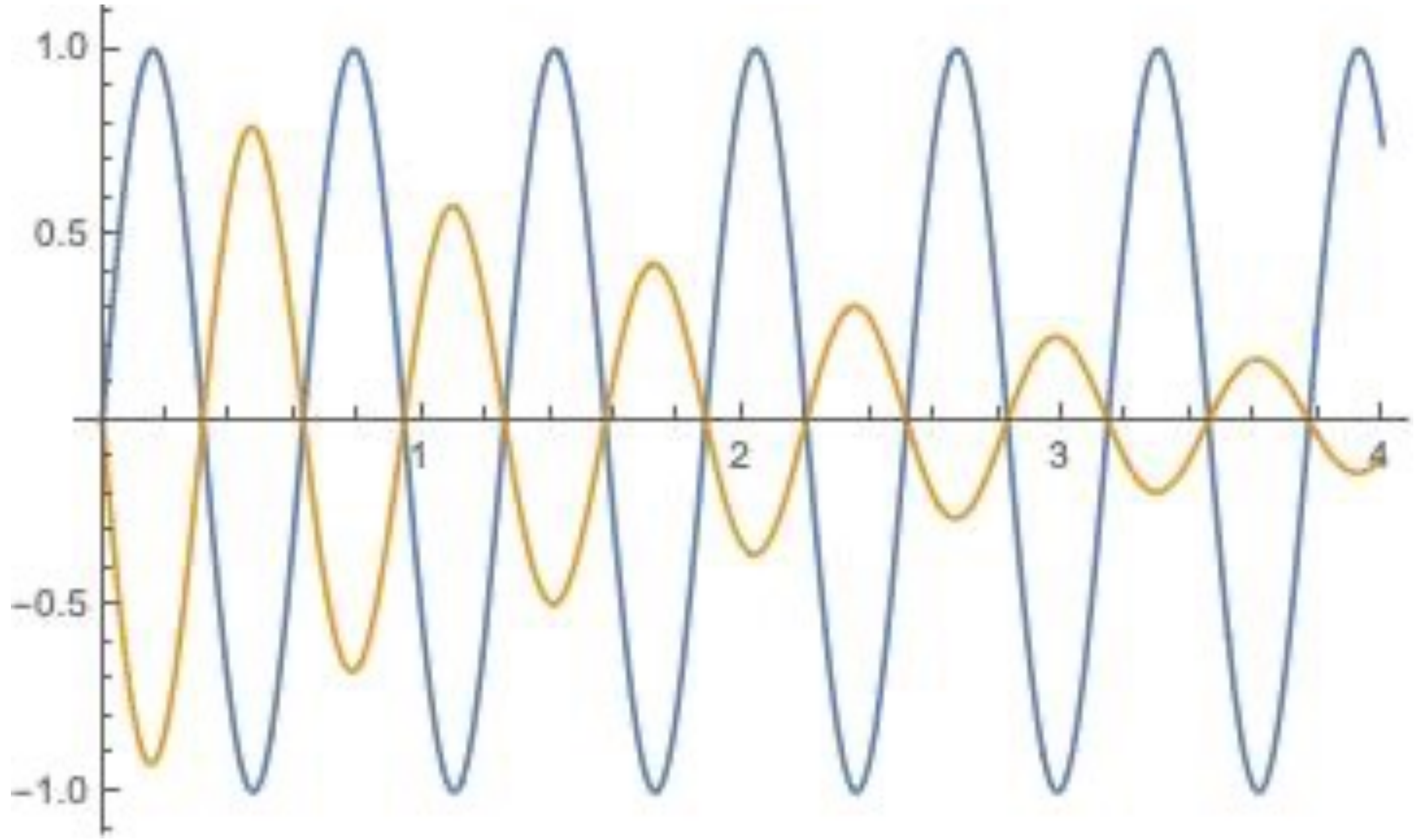
- Nestas condições temos que

$$x(t) = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0}\sin(\omega_0 t)\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t}\right) + x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_0 t)$$

Para $x_0 = 0$



total



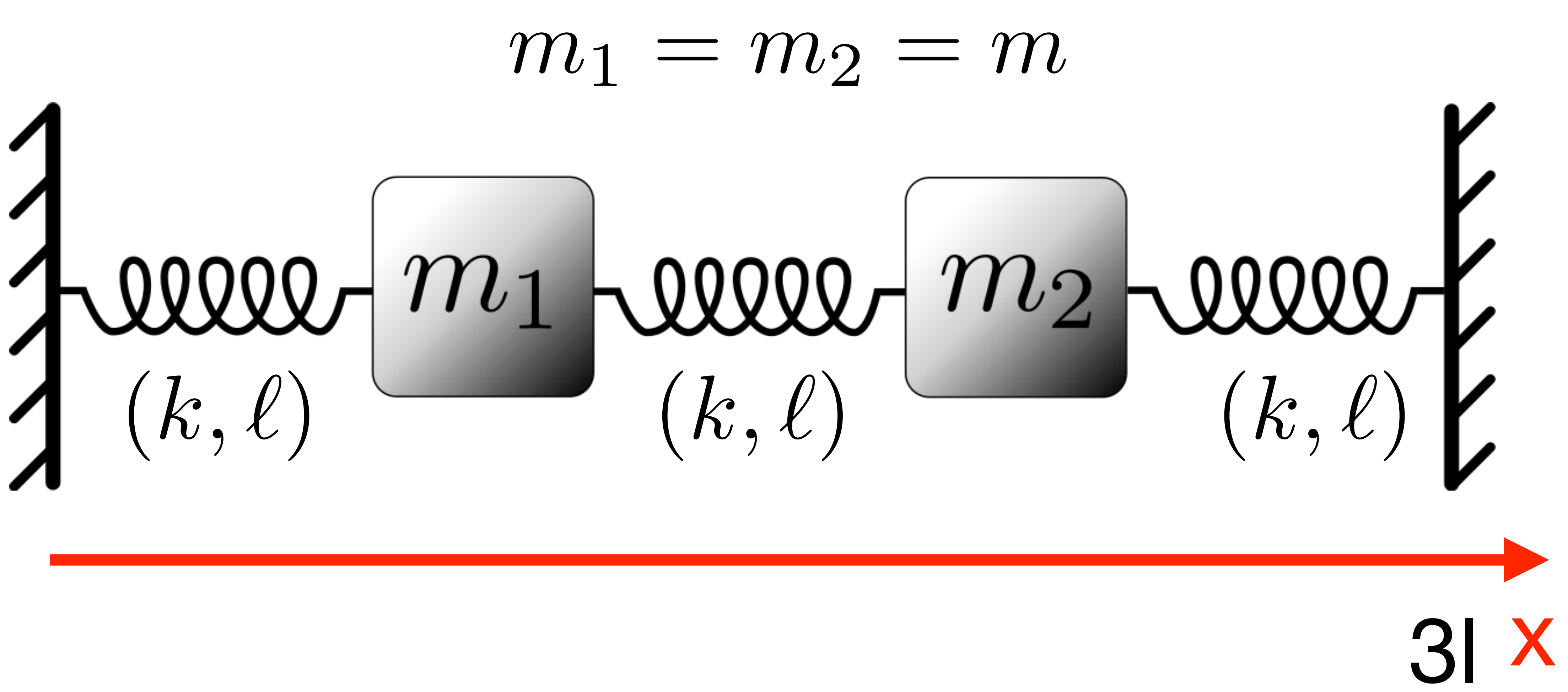
particular (azul) e transiente (amarelo)

- E se não houver amortecimento?

$$x(t) = \frac{F_0}{m\gamma\omega_0}\sin(\omega_0 t)\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{2}t}\right) + x_0 e^{-\frac{\gamma}{2}t}\cos(\omega_0 t)$$

$$\text{Para } x_0 = 0$$

2. Oscilações acopladas!



- Consideremos dois osciladores acoplados:

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k(x_1 - \ell) + k(x_2 - x_1 - \ell)$$

sistema acoplado de equações diferenciais!

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -k(x_2 - 2\ell) - k(x_2 - x_1 - \ell)$$

- Agora definimos:

$$x_1' = x_1 - \ell \quad \text{e} \quad x_2' = x_2 - 2\ell \qquad \Longrightarrow$$

$$m\frac{d^2x_1'}{dt^2} = -kx_1' + k(x_2' - x_1')$$

$$m\frac{d^2x_2'}{dt^2} = -kx_2' - k(x_2' - x_1')$$

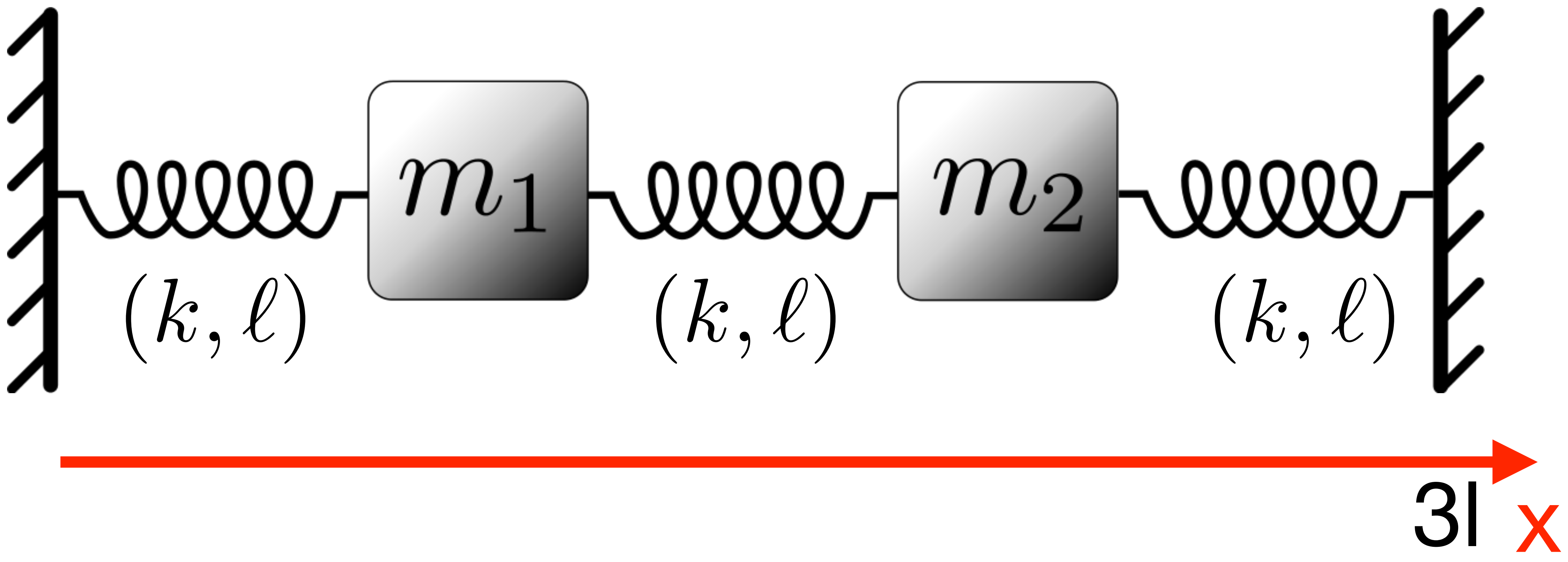
- Dois métodos de solução: 1. Mudança de variáveis e 2. Matrizes!

1. Mudança de variáveis:

$$m\frac{d^2x_1'}{dt^2} = -kx_1' + k(x_2' - x_1')$$

$$m\frac{d^2x_2'}{dt^2} = -kx_2' - k(x_2' - x_1')$$

$$m_1 = m_2 = m$$



Somando e subtraindo estas equações:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1' + x_2') = -k(x_1' + x_2')$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_2' - x_1') = -3k(x_2' - x_1')$$

Definimos $q_1 = \dfrac{x_1' + x_2'}{2}$ e $q_2 = \dfrac{x_2' - x_1'}{2}$

$$m\frac{d^2q_1}{dt^2} = -kq_1$$

$$m\frac{d^2q_2}{dt^2} = -3kq_2$$

$$m\frac{d^2q_1}{dt^2} = -kq_1 \qquad\qquad \frac{d^2q_1}{dt^2} = -\omega_0^2 q_1$$

$$\Longrightarrow$$

$$m\frac{d^2q_2}{dt^2} = -3kq_2 \qquad\qquad \frac{d^2q_2}{dt^2} = -3\omega_0^2 q_2$$

- q1 e q2 oscilam com frequências diferentes
- q1 e q2 são chamados de modos/coordenadas normais
- x1 e x2 são superposições de osciladores harmônicos simples

$$q_1 = A_1\cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$
$$q_2 = A_2\cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi_2)$$

com

$$x_1 = q_1 - q_2$$
$$x_2 = q_1 + q_2$$

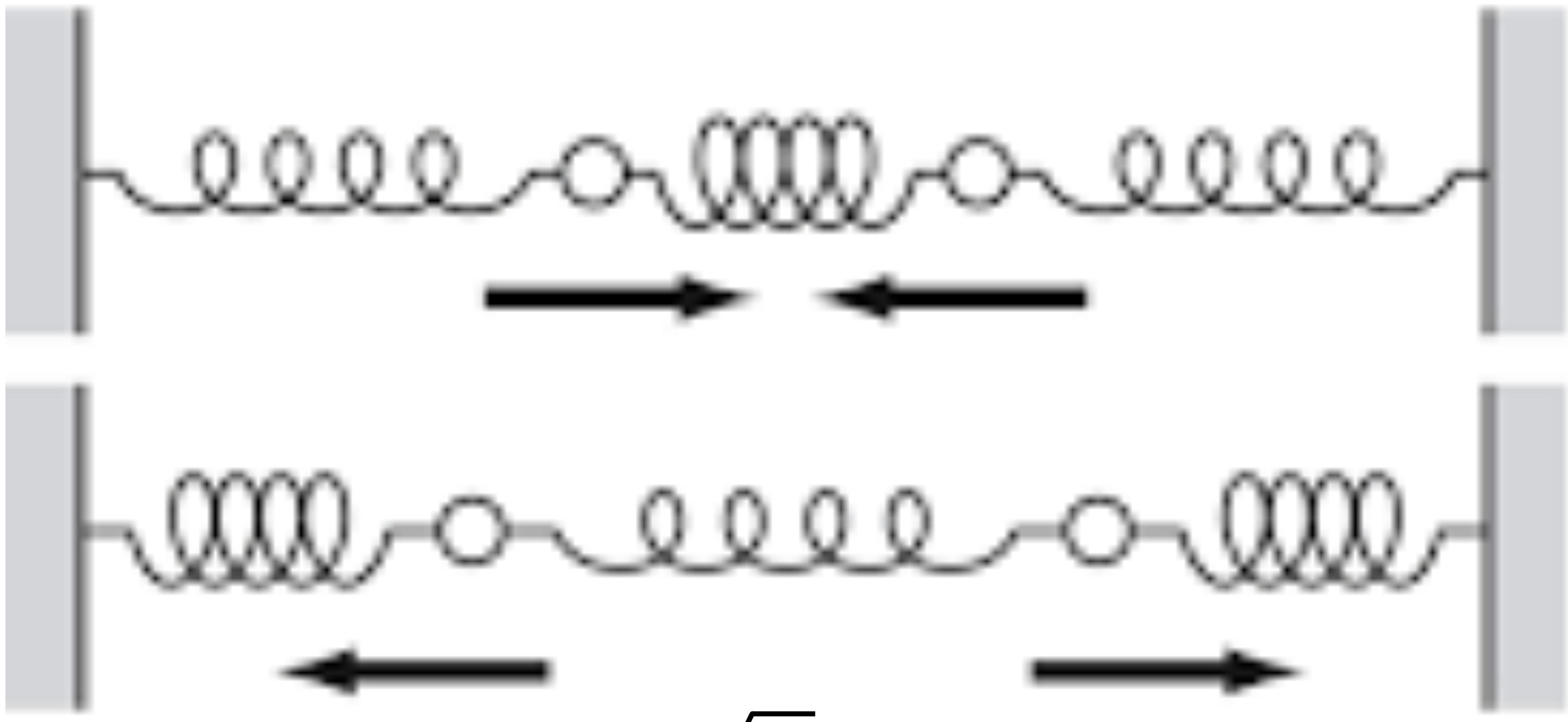
$$q_1 = A_1 \cos(\omega_0 t + \varphi_1)$$
$$q_2 = A_2 \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi_2)$$

com

$$x_1 = q_1 - q_2$$
$$x_2 = q_1 + q_2$$

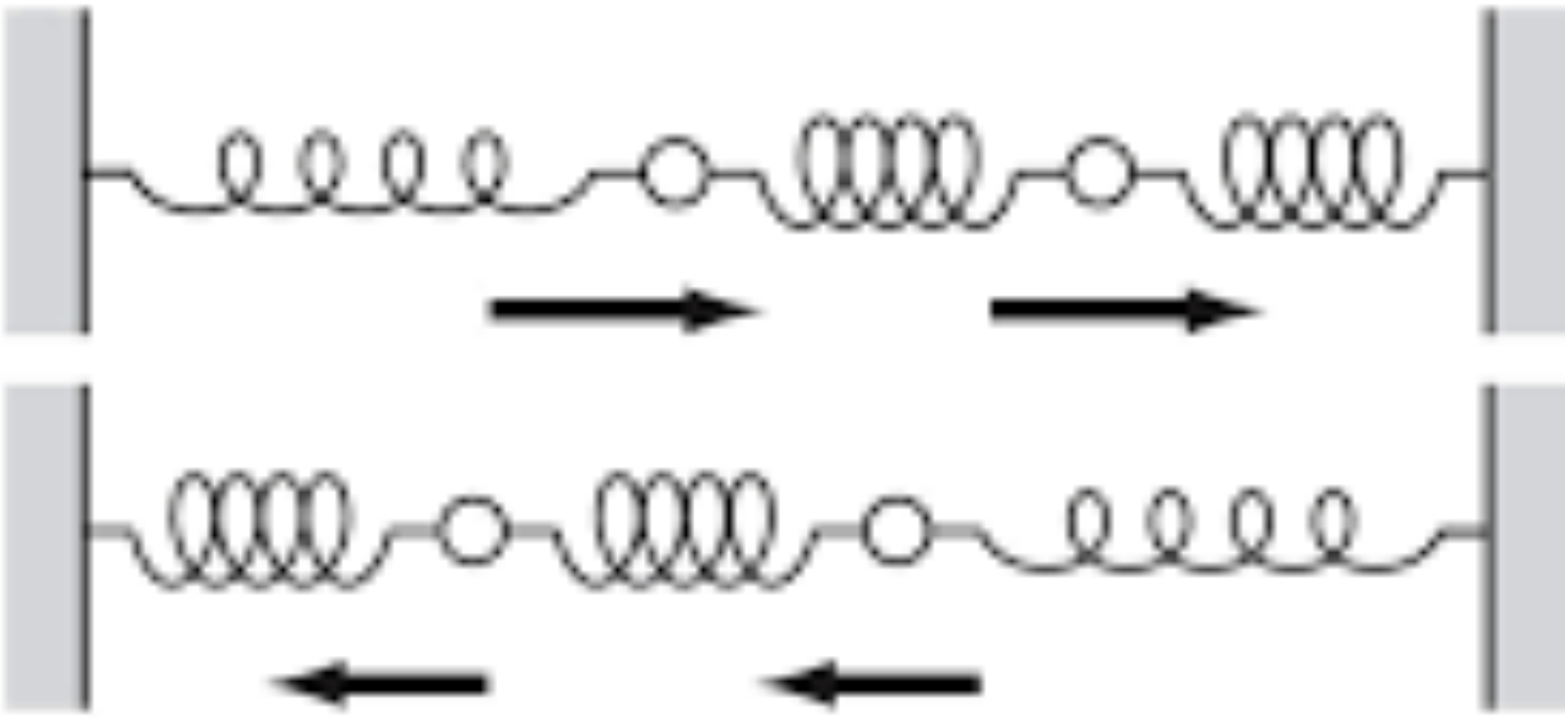
Interpretação física

$q_1 = 0 \text{ e } q_2 \neq 0$



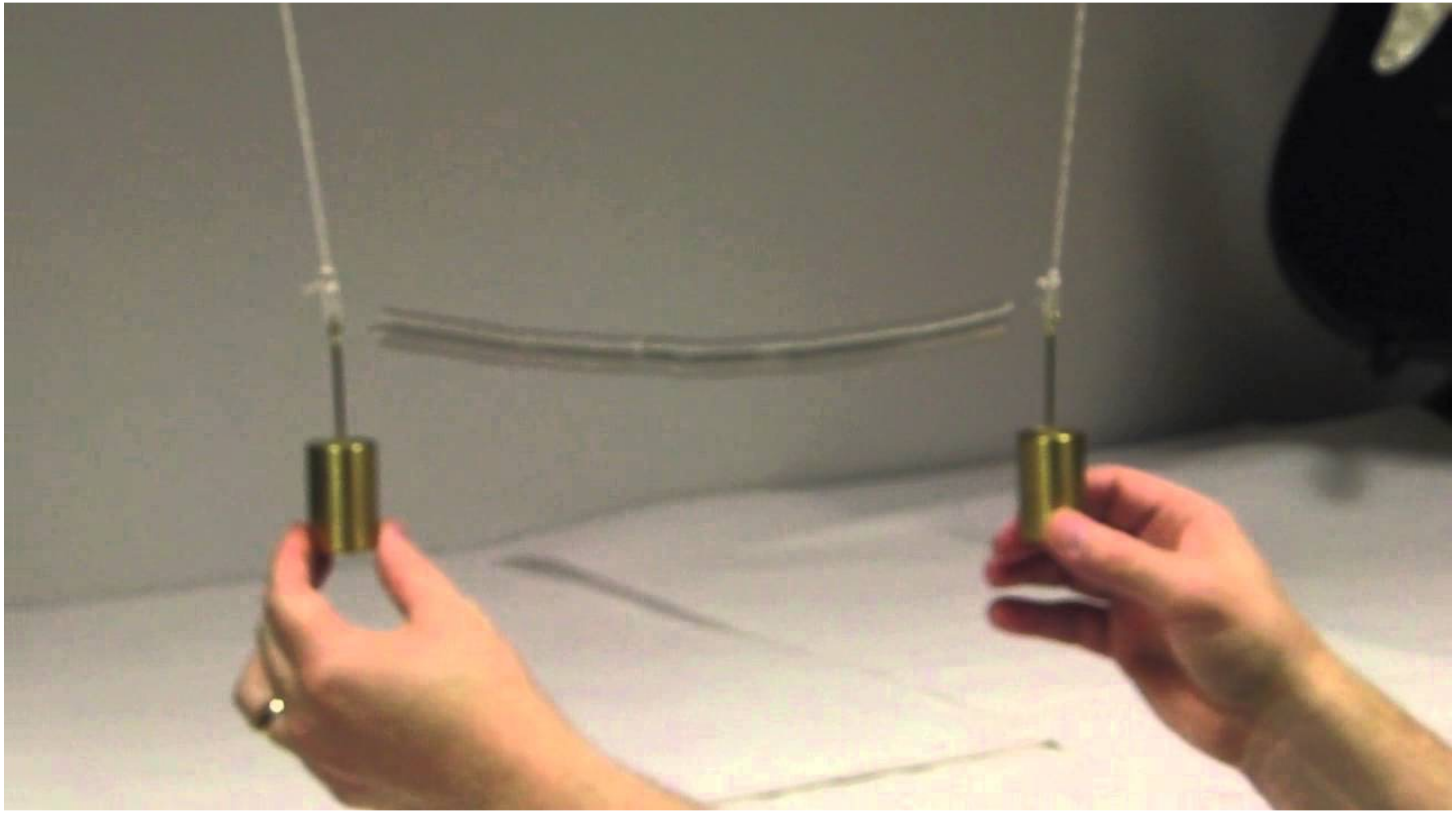
$\sqrt{3}\omega_0$

$q_1 \neq 0 \text{ e } q_2 = 0$



ω_0

- Video interessante



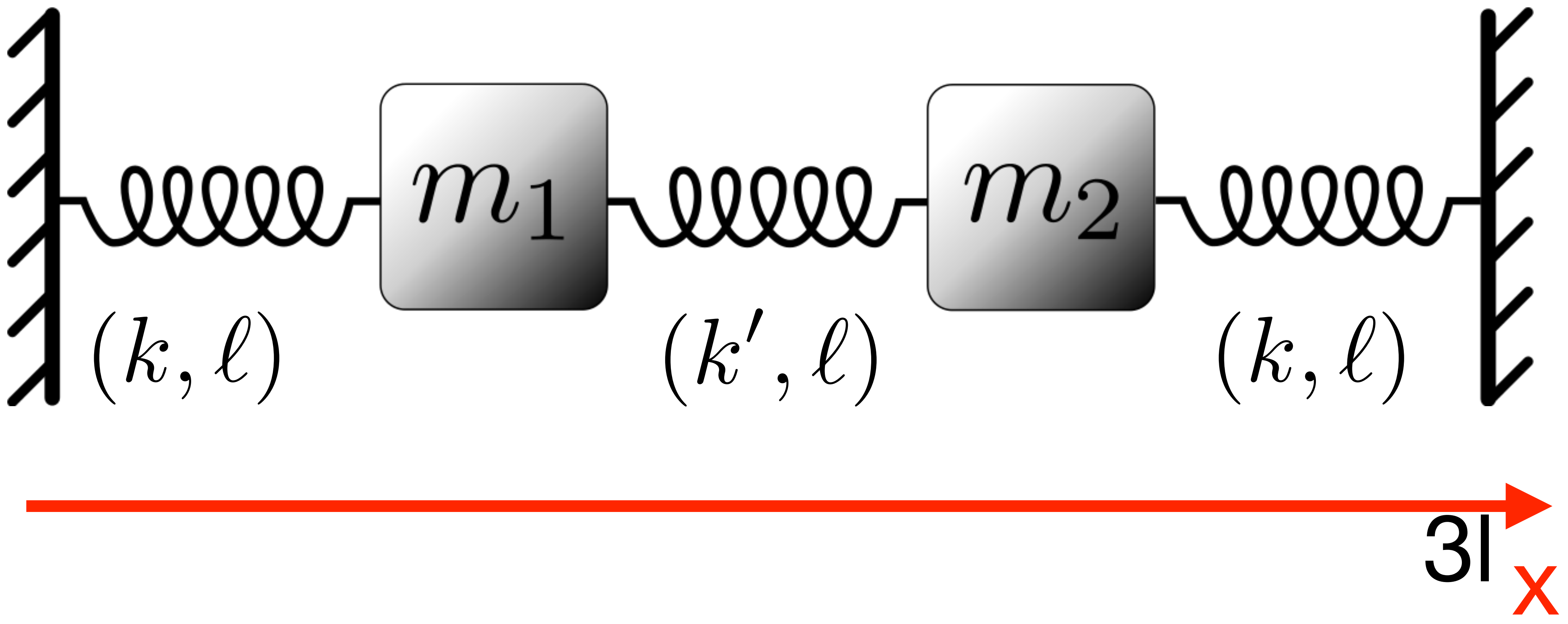
https://www.youtube.com/watch?v=YyOUJUOUvso

Generalização

$$m\frac{d^2x_1'}{dt^2} = -kx_1' + k'(x_2' - x_1')$$

$$m\frac{d^2x_2'}{dt^2} = -kx_2' - k'(x_2' - x_1')$$

$m_1 = m_2 = m$



Somando e subtraindo estas equações:

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_1' + x_2') = -k(x_1' + x_2')$$

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x_2' - x_1') = -(k + 2k')(x_2' - x_1')$$

Definimos $q_1 = \dfrac{x_1' + x_2'}{2}$ e $q_2 = \dfrac{x_2' - x_1'}{2}$

$$m\frac{d^2q_1}{dt^2} = -kq_1$$

$$m\frac{d^2q_2}{dt^2} = -(k + 2k')q_2$$

Referências:

1. Moysés Nussenzveig, Curso de Física Básica, vol. 2 seções 4.3 a 4.6 e 3.5
2. French, Vibrations and Waves, capítulo 4
3. Kleppner e Kolenkow, introduction to Mechanics, seção 10.3
4. Crawford , Waves, capítulo 1 (Berkeley volume 3)
5. Feynman, Leyton e Sands, Lectures on Physics, vol. 1, capítulo 21

- Exemplos de ressonância mecânica

https://www.youtube.com/watch?v=joS6kfjuKQo