MAP2210 - Álgebra Linear e Aplicações

1o. semestre de 2013

CUIDADO: Não revisado! (23/03/2013)

Sistema de EDOs linear homogêneo de $1^{\underline{a}}$ ordem a coeficientes constantes.

Introdução

Um sistema de EDOs do tipo

$$\dot{y} = Ay, \tag{1}$$

onde $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$, é dito um *sistema de EDOs linear homogêneo de 1a. ordem a coeficientes constantes*.

As soluções reais de um tal sistema são as funções $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ de classe C^1 tais que

$$\dot{\phi}(t) = A\phi(t), \forall t \in \mathbf{R}. \tag{2}$$

Exercício 1 Mostre que se $\phi(t)$ e $\psi(t)$, $t \in \mathbf{R}$, são duas soluções de (1) e $\alpha \in \mathbf{R}$, então

(i) γ definida por $\gamma(t) = \phi(t) + \psi(t)$, $t \in \mathbf{R}$, é solução de (1);

(ii) η definida por $\eta(t) = \alpha\phi(t)$, $t \in \mathbf{R}$, é solução de (1).

(Isto significa que o conjunto das soluções de (1) é um **subespaço vetorial**.)

Teorema 1 *O conjunto das soluções reais de (1) é um subespaço vetorial de $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{R}^n)$ de dimensão n.*

Assim, se

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$$

forem soluções de (1) linearmente independentes, a solução geral de (1) será dada por

$$\Phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \cdots + c_n\phi_n(t), t \in \mathbf{R}, \tag{3}$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são parâmetros reais.

Prova: Não será feita aqui, ela depende do Teorema de Existência e Unicidade.

Observação 1 *Pode-se considerar soluções complexas de (1) , ou seja, funções* $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{C^n}$ *de classe* C^1 *tais que*

$$\dot{\phi}(t) = A\phi(t), \forall t \in \mathbf{R}. \tag{4}$$

Nesse caso, o espaço das soluções complexas é um subespaço de dimensão n *de* $C^1(\mathbf{R}, \mathbf{C^n})$ *(olhado como espaço vetorial sobre* $\mathbf{C}$*). Assim, se*

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n : \mathbf{R} \to \mathbf{C^n}$$

forem soluções de (1) linearmente independentes, a solução geral complexa de (1) será dada por

$$\Phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \cdots + c_n\phi_n(t), t \in \mathbf{R}, \tag{5}$$

onde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *são parâmetros complexos.*

Observação 2 *Note que no caso em que* $n = 1$*, a equação (1) toma a forma*

$$\dot{y} = ay,$$

onde $a \in \mathbf{R}$*, e suas soluções reais são as funções* $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ *definidas por* $\phi(t) = ce^{at}, t \in \mathbf{R}$*, onde* c *é um parâmetro em* $\mathbf{R}$*.*

Exercício 2 Encontre condições sobre $\lambda \in \mathbf{R}$ e $w \in \mathbf{R}^n$ [respectivamente, sobre $\lambda \in \mathbf{C}$ e $w \in \mathbf{C^n}$] de forma que

$$\phi(t) = e^{\lambda t}w = e^{\lambda t}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R},$$

seja solução **real** [respectivamente, **complexa**] **de (1).**

Def.: Seja V um espaço vetorial sobre um corpo K (K = R ou C).
$\lambda \in$ K é um autovalor de T se existe v $\in$ V não nulo tal que T(v) = λ v.
Nesse caso, v é dito um autovetor de T.

Definição 1 *O polinômio* $p(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ *é chamado* **polinômio característico** *de* A*.*

Se olharmos A *como matriz pertencente a* $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{R})$ *[respectivamente, pertencente a* $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{C})$*], então:*

(a) As raízes reais [respectivamente, complexas] de $p(\lambda)$ *são os autovalores de* A*.*

Se V = R^n [respect. C^n] e fixamos sua a base canônica, podemos representar T(x) como matriz coluna de forma que T(x) = Ax, onde A é a matriz de T na base canônica.

Neste caso, os autovalores de T são exatamente as raízes reais [respect. complexas] do polinômio c aracterístico de A, definido por p(λ) = det (λ I - A).

(b) Se $\widetilde{\lambda}$ for um autovalor de A, os vetores não nulos $w \in \mathbf{R}^n$ [respectivamente, $w \in \mathbf{C^n}$] satisfazendo o sistema linear $(A - \lambda I)w = O$ são os autovetores de A associados ao autovalor $\widetilde{\lambda}$.

Proposição 1 *Se $\widetilde{\lambda} \in \mathbf{R}$ [respectivamente, $\widetilde{\lambda} \in \mathbf{C}$] é um autovalor de A e $w \in \mathbf{R}^n$ [respectivamente, $w \in \mathbf{C^n}$] é um autovetor de A associados ao autovalor $\widetilde{\lambda}$, então $\phi(t) = e^{\widetilde{\lambda} t} w, t \in \mathbf{R}$ é uma solução real [respectivamente, complexa] de (1) .*

Prova: Se você fez o exercício 2, perceberá que ele demonstra o resultado. De qualquer forma, a prova foi feita em sala.

Quando $n = 2$

Estudaremos aqui sistemas da forma (1) com $n = 2$:

$$\dot{y} = Ay, \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{6}$$

onde $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbf{R})$.

Tomando-se o polinômio característico de A quando $n = 2$, temos

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det A = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

Há três casos a tratar:

Caso 1: $\lambda_1 \neq \lambda_2$ são reais.

Caso 2: $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ com $\beta \neq 0$ são complexos conjugados distintos.

Caso 3: $\lambda_1 = \lambda_2 = \widetilde{\lambda}$ são reais iguais.

- Caso 3.1: $\lambda_1 = \lambda_2 = \widetilde{\lambda}$ são reais iguais e existem 2 autovetores linearmente independentes associados a $\widetilde{\lambda}$.
- Caso 3.2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \widetilde{\lambda}$ são reais iguais e NÃO existem 2 autovetores linearmente independentes associados a $\widetilde{\lambda}$.

Caso 1

Exercício 3 Mostre que se λ_1 e λ_2 são autovalores reais de A, **distintos**, e $w_1, w_2 \in \mathbf{R}^2$ são autovetores associados respectivamente a λ_1 e λ_2, então

$$\phi_1(t) = e^{\lambda_1 t} w_1 \quad \text{e} \quad \phi_2(t) = e^{\lambda_2 t} w_2,\ t \in \mathbf{R},$$

são soluções reais de (6) **linearmente independentes**.

Exercício 4 Justifique a afirmação:

Nas condições do exercício 3 , a solução geral **real** de (6) é

$$\Phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} w_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} w_2,\ t \in \mathbf{R},$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Exercício 5 Justifique a afirmação:

Nas condições do exercício 3, a solução geral **complexa** de (6) é

$$\Phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} w_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} w_2,\ t \in \mathbf{R},$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$.

Caso 2

Exercício 6 Mostre que se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - i\beta$ são autovalores complexos de A, **distintos**, e $w = u + iv, \overline{w} = u - iv \in \mathbf{C^2}$ são autovetores associados respectivamente a λ_1 e λ_2, então

$$\begin{aligned}
\phi_1(t) &= e^{\lambda_1 t} w = e^{(\alpha+i\beta)t}(u+iv) = e^{\alpha t}[\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)](u+iv) = \\
&= e^{\alpha t}\{[\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)v] + i[\cos(\beta t)v + \sin(\beta t)u]\} \\
&\text{e} \\
\phi_2(t) &= e^{\lambda_2 t}\overline{w} = e^{(\alpha-i\beta)t}(u+iv) = e^{\alpha t}[\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)](u+iv) = \\
&= e^{\alpha t}\{[\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)v] - i[\cos(\beta t)v + \sin(\beta t)u]\}, \quad t \in \mathbf{R},
\end{aligned}$$

são soluções complexas conjugadas de (6) **linearmente independentes**.

Exercício 7 Justifique a afirmação:

Nas condições do exercício 6, a solução geral **complexa** de (6) é

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} w + c_2 e^{\lambda_2 t}\overline{w} = \\ &= c_1 e^{(\alpha+i\beta)t}(u+iv) + c_2 e^{(\alpha-i\beta)t}(u-iv) = \\ &= c_1 e^{\alpha t}[\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)](u+iv) + \\ &\quad + c_2 e^{\alpha t}[\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)](u-iv) = \\ &= c_1 e^{\alpha t}\{[\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)v] + i[\cos(\beta t)v + \sin(\beta t)u]\} + \\ &\quad + c_2 e^{\alpha t}\{[\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)v] - i[\cos(\beta t)v + \sin(\beta t)u]\}, \quad t \in \mathbf{R},\end{aligned}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$.

Exercício 8 Nas condições do exercício 6, as funções

$$\psi_1(t) = \frac{1}{2}[\phi_1(t) + \phi_2(t)] = \mathrm{Re}(\phi_1)(t) = e^{\alpha t}[\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)v],$$

e

$$\psi_2(t) = \frac{1}{2i}[\phi_1(t) - \phi_2(t)] = \mathrm{Im}(\phi_1)(t) = e^{\alpha t}[\cos(\beta t)v + \sin(\beta t)u], \quad t \in \mathbf{R},$$

são duas soluções **reais** de (6) linearmente independentes.

Exercício 9 Justifique a afirmação:

Nas condições do exercício 8, a solução geral **real** de (6) é

$$\begin{aligned}\Phi(t) &= c_1\psi_1(t) + c_2\psi_2(t) = c_1\mathrm{Re}(\phi_1)(t) + c_2\mathrm{Im}(\phi_2)(t) = \\ &= c_1 e^{\alpha t}[\cos(\beta t)u - \sin(\beta t)v] + c_2 e^{\alpha t}[\cos(\beta t)v + \sin(\beta t)u], \quad t \in \mathbf{R},\end{aligned}$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Caso 3.1

Exercício 10 Mostre que se $\lambda_1 = \lambda_2 = \widetilde{\lambda}$ é autovalor real duplo de A, e existem $w_1, w_2 \in \mathbf{R}^2$ autovetores associados a $\widetilde{\lambda}$ linearmente independentes, então

$$\phi_1(t) = e^{\widetilde{\lambda} t} w_1 \quad \text{e} \quad \phi_2(t) = e^{\widetilde{\lambda} t} w_2, \ t \in \mathbf{R},$$

são soluções reais de (6) **linearmente independentes**.

Exercício 11 Justifique a afirmação:

Nas condições do exercício 10 , a solução geral **real** de (6) é

$$\Phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = c_1 e^{\widetilde{\lambda} t} w_1 + c_2 e^{\widetilde{\lambda} t} w_2, \ t \in \mathbf{R},$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Exercício 12 Justifique a afirmação:

Nas condições do exercício 10, a solução geral **complexa** de (6) é

$$\Phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = c_1 e^{\widetilde{\lambda} t} w_1 + c_2 e^{\widetilde{\lambda} t} w_2, \ t \in \mathbf{R},$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$.

Caso 3.2

Exercício 13 Mostre que se $\lambda_1 = \lambda_2 = \widetilde{\lambda}$ é autovalor real duplo de A, e NÃO existem dois autovetores associados a $\widetilde{\lambda}$ linearmente independentes, então se $w \in \mathbf{R}^2$ é um autovetor associado a $\widetilde{\lambda}$ e $\widehat{w} \in \mathbf{R}^2$ é solução do sistema $(A - \widetilde{\lambda})\widehat{w} = w$, então

$$\phi_1(t) = e^{\widetilde{\lambda} t} w \quad \text{e} \quad \phi_2(t) = e^{\widetilde{\lambda} t}\widehat{w} + t e^{\widetilde{\lambda} t} w, \ t \in \mathbf{R},$$

são soluções reais de (6) **linearmente independentes**.

Exercício 14 Justifique a afirmação:

Nas condições do exercício 13 , a solução geral **real** de (6) é

$$\Phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = c_1 e^{\widetilde{\lambda} t} w + c_2(e^{\widetilde{\lambda} t}\widehat{w} + t e^{\widetilde{\lambda} t} w), \ t \in \mathbf{R},$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbf{R}$.

Exercício 15 Justifique a afirmação:

Nas condições do exercício 13 , a solução geral **complexa** de (6) é

$$\Phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) = c_1 e^{\widetilde{\lambda} t} w + c_2(e^{\widetilde{\lambda} t}\widehat{w} + t e^{\widetilde{\lambda} t} w), \ t \in \mathbf{R},$$

onde $c_1, c_2 \in \mathbf{C}$.

Exercício 16 Ache a solução geral real de:

(a) $\dot{y} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} y$ (e) $\dot{y} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y$

(b) $\dot{y} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} y$ (f) $\dot{y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} y$

(c) $\dot{y} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} y$ (g) $\dot{y} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} y$

(d) $\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y$ (h) $\dot{y} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} y$

Exercício 17 Ache a solução geral real de:

(a) $\dot{y} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} y$ (d) $\dot{y} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y$

(b) $\dot{y} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} y$ (e) $\dot{y} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y$

(c) $\dot{y} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} y$ (f) $\dot{y} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} y$