Introdução à Física das Partículas Elementares

4300422

edisciplinas.if.usp.br

(buscar: física das partículas elementares)

Fernando S Navarra

navarra@if.usp.br

Guilherme Germano

guilherme.germano@usp.br

Plano do Curso

14/03	Cap. 1
16/03	Cap. 1
21/03	Cap. 2
23/03	Cap. 2
28/03	Cap. 3
30/03	Cap. 3
04/04	
06/04	
11/04	Cap. 4
13/04	Cap. 4
18/04	Cap. 4
20/04	P1
25/04	Cap. 6
27/04	Cap. 6
04/05	Cap. 7
09/05	Cap. 7
11/05	Cap. 8
16/05	Cap. 8
18/05	Cap. 8
23/05	P2
25/05	Cap. 9
30/05	Cap. 9
01/06	Cap. 9
06/06	
08/06	
13/06	Cap. 10
15/06	Cap. 10
20/06	Cap. 10
22/06	Cap. 11
27/06	Cap. 11
29/06	P3
04/07	Sub

Aula 8

Capítulo 4

Equação de Dirac

Probabilidade na Equação de Klein Gordon

$$\rho = i\left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t}\right) \qquad \mathbf{j} = -i(\psi^* \boldsymbol{\nabla} \psi - \psi \boldsymbol{\nabla} \psi^*)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$$

Para a solução de onda plana $\psi(\mathbf{x}, t) = N e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)}$

$$\rho = 2|N|^2 E \qquad \mathbf{j} = 2|N|^2 \mathbf{p}$$

$$E < 0 \longrightarrow \rho < 0$$

Problema para a interpretação de probabilidade !

Probabilidade na Equação de Dirac

$$\hat{E}\psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m)\psi$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-i\alpha_x\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha_y\frac{\partial}{\partial y} - i\alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + \beta m\right)\psi$$

"espinor"

$$\begin{aligned} \alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = I, \\ \alpha_j\beta + \beta\alpha_j = 0, \\ \alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 0 \quad (j \neq k), \end{aligned}$$

Matrizes de Dirac :

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Densidade de Probabilidade e de Corrente

$$\psi^\dagger = (\psi^*)^T \qquad\qquad \psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$$

$$-i\alpha_x \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\alpha_y \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\alpha_z \frac{\partial \psi}{\partial z} + m\beta\psi = +i\frac{\partial \psi}{\partial t}$$

Eq. Dirac (ED)

$$+i\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x}\alpha_x^\dagger + i\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial y}\alpha_y^\dagger + i\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial z}\alpha_z^\dagger + m\psi^\dagger\beta^\dagger = -i\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t}$$

Eq. Dirac adjunta (EDA)

$$\psi^\dagger \times ED - EDA \times \psi$$

$$\psi^\dagger\left(-i\alpha_x \frac{\partial \psi}{\partial x} - i\alpha_y \frac{\partial \psi}{\partial y} - i\alpha_z \frac{\partial \psi}{\partial z} + \beta\cancel{m}\psi\right)$$

$$-\left(i\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x}\alpha_x + i\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial y}\alpha_y + i\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial z}\alpha_z + \cancel{m}\psi^\dagger\beta\right)\psi \quad = i\psi^\dagger\frac{\partial \psi}{\partial t} + i\frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t}\psi$$

Usando as identidades da regra do produto :

$$\psi^\dagger \alpha_x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial x} \alpha_x \psi \equiv \frac{\partial(\psi^\dagger \alpha_x \psi)}{\partial x} \qquad \psi^\dagger \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi^\dagger}{\partial t} \psi \equiv \frac{\partial(\psi^\dagger \psi)}{\partial t}$$

A equação da página anterior fica :

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi) + \frac{\partial(\psi^\dagger \psi)}{\partial t} = 0$$

onde: $\rho = \psi^\dagger \psi$ $\quad$ $\mathbf{j} = \psi^\dagger \boldsymbol{\alpha} \psi$

$$\rho = \psi^\dagger \psi = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + |\psi_3|^2 + |\psi_4|^2$$

$$\rho > 0$$

Problema resolvido !

Matrizes de Dirac

$$(\gamma^0)^2 = I \qquad (\gamma^k)^2 = -I, \qquad \gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$$

$$k = 1, 2, 3 \qquad \mu \neq \nu$$

Anticomutador $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}$

Hermitiana $\gamma^{0\dagger} = \gamma^0$

$\gamma^{k\dagger} = -\gamma^k.$ Anti-Hermitiana

Representação de Pauli-Dirac $\rightarrow$

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \gamma^k = \beta\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Corrente covariante

$$\rho = \psi^\dagger \psi$$

$$\mathbf{j} = \psi^\dagger \alpha \psi$$

$$\longrightarrow$$

$$j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi$$

quadrivetor

Para verificar, basta substituir : $(\gamma^0)^2 = 1$ $\quad \gamma^0 \gamma^k = \beta\beta\alpha_k = \alpha_k$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} = 0 \longrightarrow \partial_\mu j^\mu = 0$$

Introduzimos o espinor adjunto $\overline{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma^0$

$$j^\mu = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \psi \longrightarrow j^\mu = \overline{\psi} \gamma^\mu \psi$$

Soluções da Equação de Dirac

Vamos procurar uma solução de partícula livre (onda plana) :

$$\psi(\mathbf{x},t) = u(E,\mathbf{p})e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)} \longrightarrow (i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi = 0$$

$$\partial_0\psi \equiv \frac{\partial\psi}{\partial t} = -iE\psi, \quad \partial_1\psi \equiv \frac{\partial\psi}{\partial x} = ip_x\psi \quad \partial_2\psi = ip_y\psi \quad \partial_3\psi = ip_z\psi$$

$$(\gamma^0 E - \gamma^1 p_x - \gamma^2 p_y - \gamma^3 p_z - m)u(E,\mathbf{p})e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)} = 0$$

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\,u = 0$$

Partícula em repouso

$$\mathbf{p} = \mathbf{0} \longrightarrow \psi = u(E,0)e^{-iEt}$$

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\,u = 0 \longrightarrow E\gamma^0 u = mu$$

$$E\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{aligned} E\,\phi_1 &= m\,\phi_1 \\ E\,\phi_2 &= m\,\phi_2 \\ -E\,\phi_3 &= m\,\phi_3 \\ -E\,\phi_4 &= m\,\phi_4 \end{aligned}$$

$$u_1(E,0) = N\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad u_2(E,0) = N\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad E = +m$$

Quatro soluções independentes

$$u_1(E,0) = N\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad u_2(E,0) = N\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad E = +m$$

$$u_3(E,0) = N\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad u_4(E,0) = N\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \qquad E = -m$$

Substituindo em $\psi = u(E,0)e^{-iEt}$

$$\psi_1 = N\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}e^{-imt}, \; \psi_2 = N\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}e^{-imt}, \; \psi_3 = N\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}e^{+imt} \; \psi_4 = N\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}e^{+imt}$$

$$E = +m \qquad E = +m \qquad E = -m \qquad E = -m$$

Partícula livre em movimento

$$\boxed{(\gamma^\mu p_\mu - m)\, u = 0}$$

$$(E\gamma^0 \underbrace{- p_x\gamma^1 - p_y\gamma^2 - p_z\gamma^3}_{-p_k\,\gamma^k} - m)u = 0$$

$$\gamma^k = \beta\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} E - \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & 0 \end{pmatrix} - m\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}\right] u = 0$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} (E-m)I & -\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \\ \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} & -(E+m)I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_A \\ u_B \end{pmatrix} = 0$$

$$\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} \equiv \sigma_x p_x + \sigma_x p_y + \sigma_x p_z = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}}$$

Duas equações acopladas :

$$u_A = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E-m}u_B \qquad u_B = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}u_A$$

$$u_B = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m}u_A \qquad \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}$$

$$u_B = \frac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{p}}{E+m} = \frac{1}{E+m}\begin{pmatrix} p_z & p_x - ip_y \\ p_x + ip_y & -p_z \end{pmatrix}u_A$$

Escolhemos $u_A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $u_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$u_1(E,\mathbf{p}) = N_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \qquad u_2(E,\mathbf{p}) = N_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix}$$

$$u_A = \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E - m} u_B.$$

Escolhemos

$$u_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad u_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$u_3 = N_3 \begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad\qquad u_4 = N_4 \begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Assim encontramos quatro soluções ortogonais

$$\psi_i = u_i(E,\mathbf{p})e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)}$$

$$u_1 = N_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{p_z}{E+m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E+m} \end{pmatrix} \quad u_2 = N_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{p_x-ip_y}{E+m} \\ \frac{-p_z}{E+m} \end{pmatrix} \qquad u_3 = N_3\begin{pmatrix} \frac{p_z}{E-m} \\ \frac{p_x+ip_y}{E-m} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_4 = N_4\begin{pmatrix} \frac{p_x-ip_y}{E-m} \\ \frac{-p_z}{E-m} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E = +\left|\sqrt{\mathrm{p}^2 + m^2}\right| \qquad\qquad E = -\left|\sqrt{\mathrm{p}^2 + m^2}\right|$$

Senão os denominadores podem explodir !

Continuamos encontrando energias negativas !

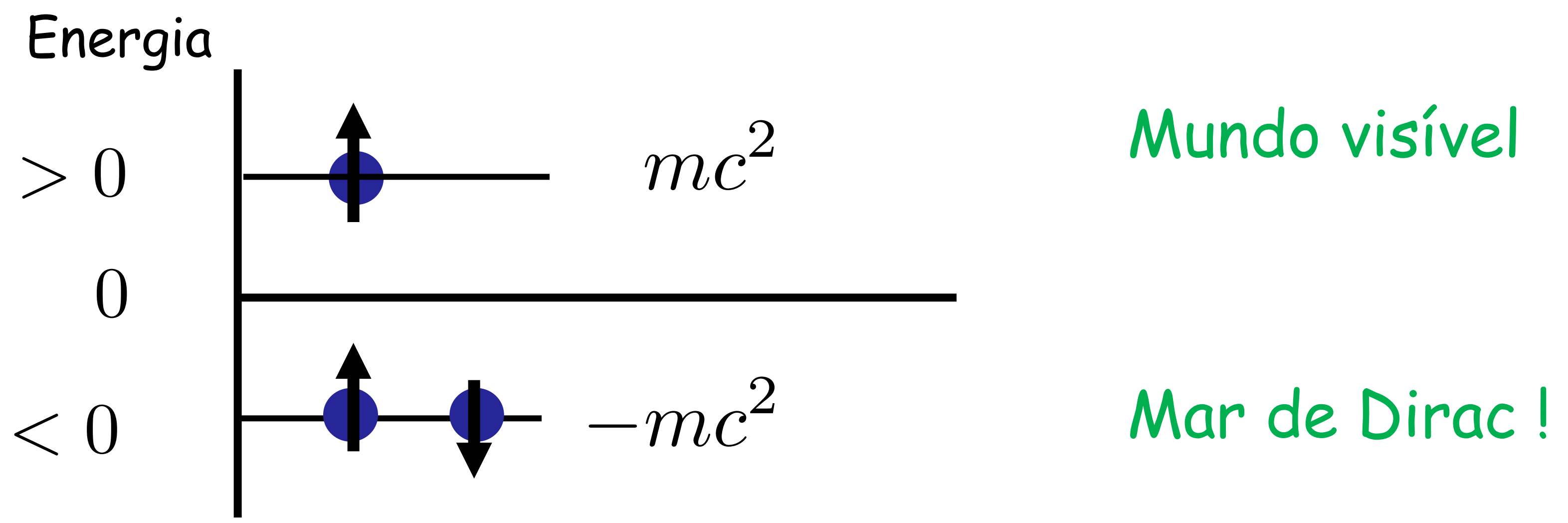
As Soluções de Energia Negativa

As soluções com energia negativa não podem ser descartadas !

Problema: em elétron poderia "cair" indefinidamente para níveis de energia cada vez menores, mais negativos... Não vemos isso!

Solução de Dirac: os níveis com energia negativa já estão todos preenchidos e o elétron não "cai" porque não encontra lugar para cair! Princípio da exclusão de Pauli.

"Universo cheio" : Estamos cercados, inundados de partículas com energia negativa

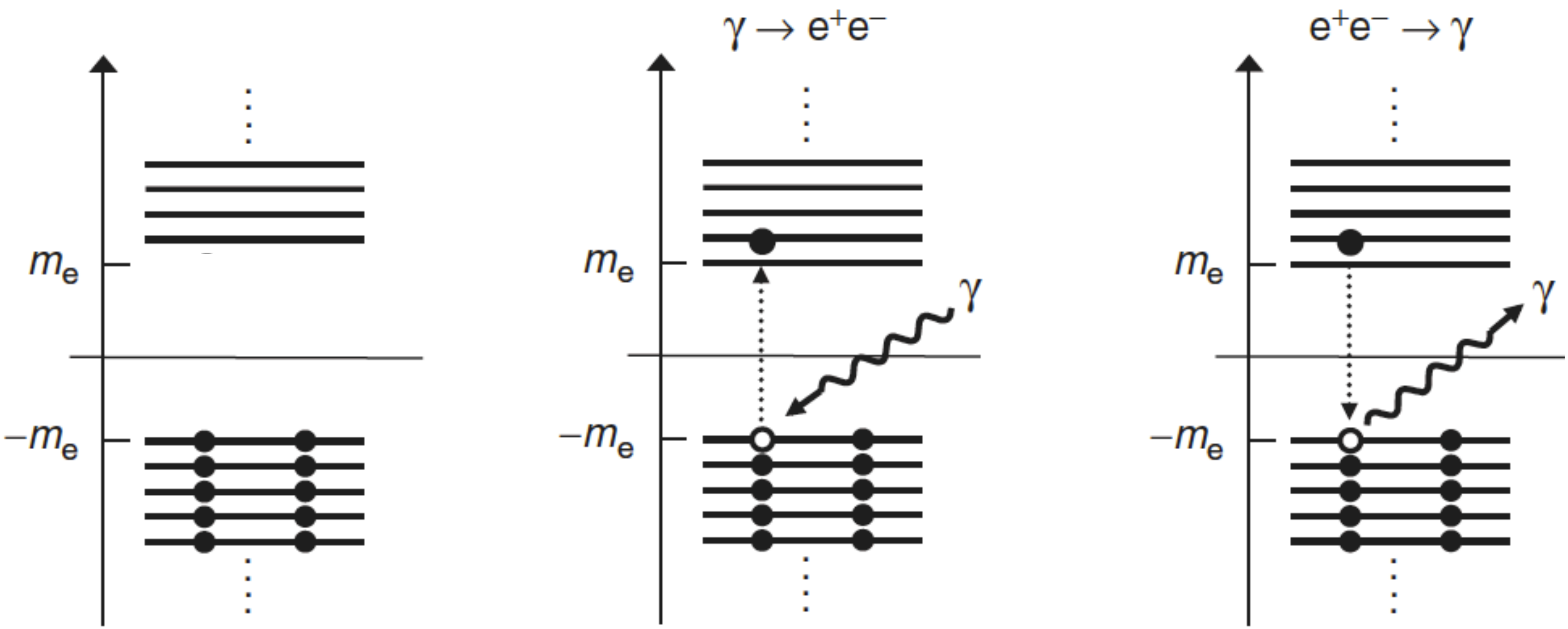


Posso "injetar" energia num elétron do mar jogando um fóton sobre ele !

Ele é excitado, passa a ter energia positiva e aparece no "mundo visível"

No lugar onde ele estava fica uma falta, uma vacância, um buraco

A falta de uma carga negativa é vista como excesso de uma carga positiva



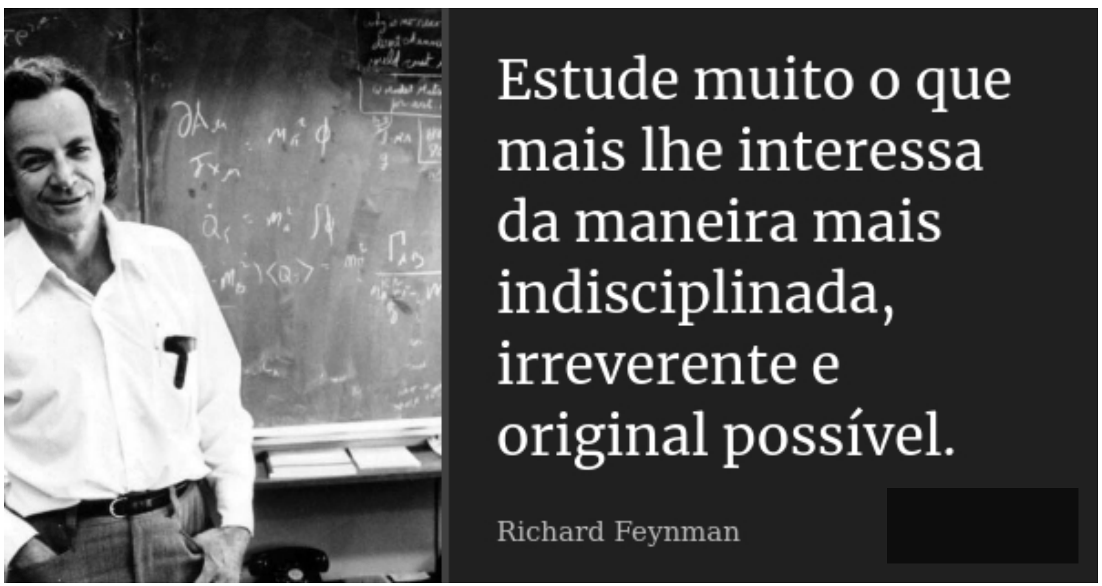
Antipartícula = "buraco no mar" !!!

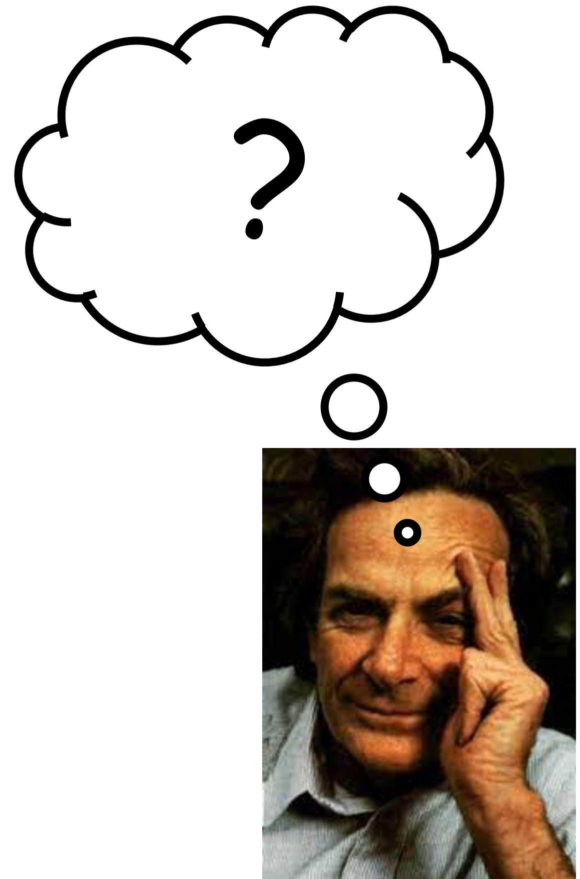
Problemas

O mar de Dirac preenche o universo e tem consequências em cosmologia !

Precisa do princípio de Pauli e só funciona para fermions!

O que fazer com bosons de energia negativa ?





Interpretação de Feynman - Stückelberg

Não existe mar de Dirac nem vácuo cheio de partículas de energia negativa

mas...

As partículas com energia negativa andam prá trás no tempo !

(Psicose)

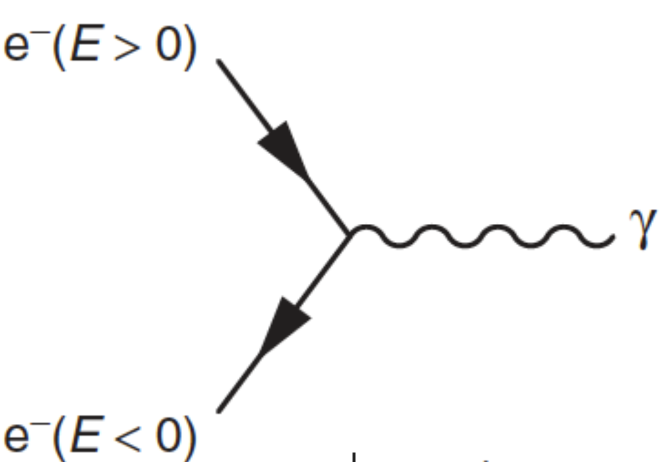
$$\psi(\mathbf{x},t) = u(E,\mathbf{p})e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)} \qquad E<0 \qquad t<0$$

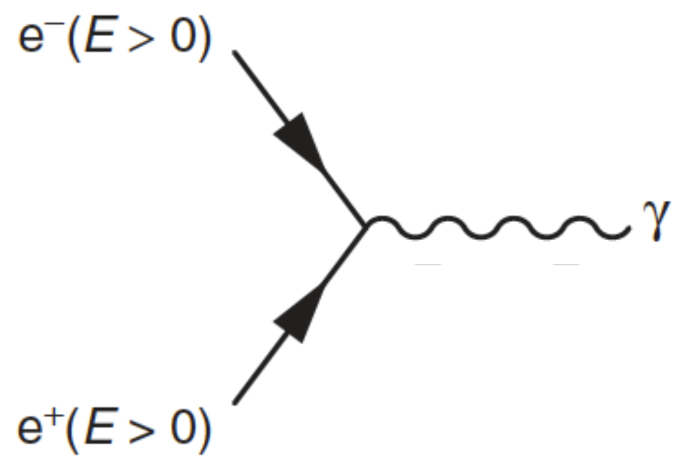
Observação matemática :

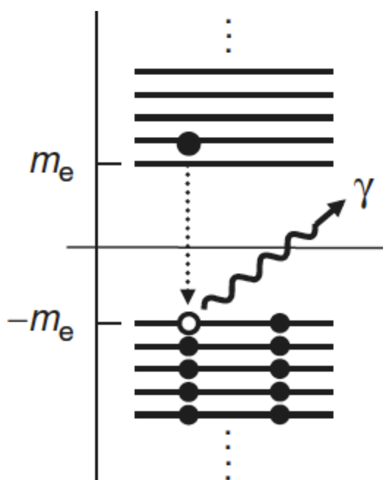
$$\left\{ \begin{array}{l} E \rightarrow -E \\ t \rightarrow -t \end{array} \right. \longrightarrow \quad \exp\{-iEt\} \equiv \exp\{-i(-E)(-t)\}$$

$$\psi(\mathbf{x},t) = u(E,\mathbf{p})e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)} \qquad E<0 \qquad t<0$$

$$\begin{cases} E \to -E \\ t \to -t \end{cases} \longrightarrow \quad \exp\{-iEt\} \equiv \exp\{-i(-E)(-t)\}$$







Conservação da carga elétrica
do vértice exige o aparecimento
do e^+ (pósitron) ! A antipartícula !

FIM