Números Complexos

Já falamos mais de uma vez de números complexos. Vamos agora descrevê-los sistematicamente.

Um **número complexo** é um par ordenado (a,b) de números reais $a,b \in \mathbb{R}$. Dois números complexos são iguais se o são como pares ordenados:

$$(a,b) = (c,d) \iff a=c \text{ e } b=d.$$

Adição de números complexos é feita coordenada a coordenada:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1+a_2, b_1+b_2)$$

O produto de números complexos é mais interessante.

Definimos

$$(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) := (a_1 a_2 - b_1 b_2,\ a_1 b_2 + a_2 b_1)$$

Como acontece com os números reais, essas operações têm várias propriedades importantes: elas são comutativas e associativas, e a soma é distributiva em relação ao produto.

Vejamos associatividade, por exemplo: se x, y, z são números complexos, então

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

Prova: $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$, $z = (z_1, z_2)$

$$(x_1,x_2)\cdot\big((y_1,y_2)\cdot(z_1,z_2)\big) = (x_1,x_2)\cdot\left(y_1z_1-y_2z_2,\ y_1z_2+y_2z_1\right) =$$

$$= \big(x_1(y_1z_1-y_2z_2)-x_2(y_1z_2+y_2z_1),\ x_1(y_1z_2+y_2z_1)+x_2(y_1z_1-y_2z_2)\big) =$$

$$= \big((x_1y_1-x_2y_2)z_1-(x_1y_2+x_2y_1)z_2,\ (x_1y_2+x_2y_1)z_1+(x_1y_1-x_2y_2)z_2\big) =$$

$$= \big((x_1y_1-x_2y_2),\ (x_1y_2+x_2y_1)\big)\cdot(z_1,z_2)$$

$$= \big((x_1,x_2)\cdot(y_1,y_2)\big)\cdot(z_1,z_2)$$

Exercício: Prove distributividade.

O conjunto dos números complexos é denotado por $\boxed{\mathbb{C}}$

Elementos neutros

O elemento neutro da soma é, obviamente, $(0,0)$: $\underline{\underline{0}}$

$$(a,b)+(0,0)=(a,b)$$

O elemento neutro do produto não é tão óbvio: precisamos encontrar um número complexo $e=(e_1,e_2)$ tal que, para todo $z\neq(0,0)$, valha $z\cdot e=e\cdot z=z$.

Se $z=(a,b)$ e $e=(e_1,e_2)$, então

$$z\cdot e=(ae_1-be_2,\ ae_2+be_1)=(a,b).$$

$\underline{\underline{1}}$

Se $e_1=1$, $e_2=0$, isto é, se $e=(1,0)$, então vale $z\cdot e=e\cdot z=z$.

Exercício: Mostre que $(1,0)$ é o único elemento neutro para a multiplicação complexa.

$\mathbb{C}$ é um corpo

Reveja os axiomas de corpo do início do semestre passado. Em palavras, um corpo é um conjunto com duas operações, $+$ e $\cdot$, comutativas, associativas, $+$ se distribui sobre $\cdot$, com elementos neutros e com inversos aditivos e multiplicativos.

Inversos aditivos em $\mathbb{C}$ são fáceis: $(a,b)+(-a,-b) = (0,0)$

Inversos multiplicativos são, como seria de esperar, mais interessantes.

Dado $z = (a,b) \neq 0$, precisamos encontrar $w = (c,d)$ tal que

$z \cdot w = 1$, isto é, $(a,b) \cdot (c,d) = (1,0)$, isto é

$$\begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$$

Fazendo as contas, descobrimos que

$$c = \frac{a}{a^2+b^2} \quad , \quad d = \frac{-b}{a^2+b^2}$$

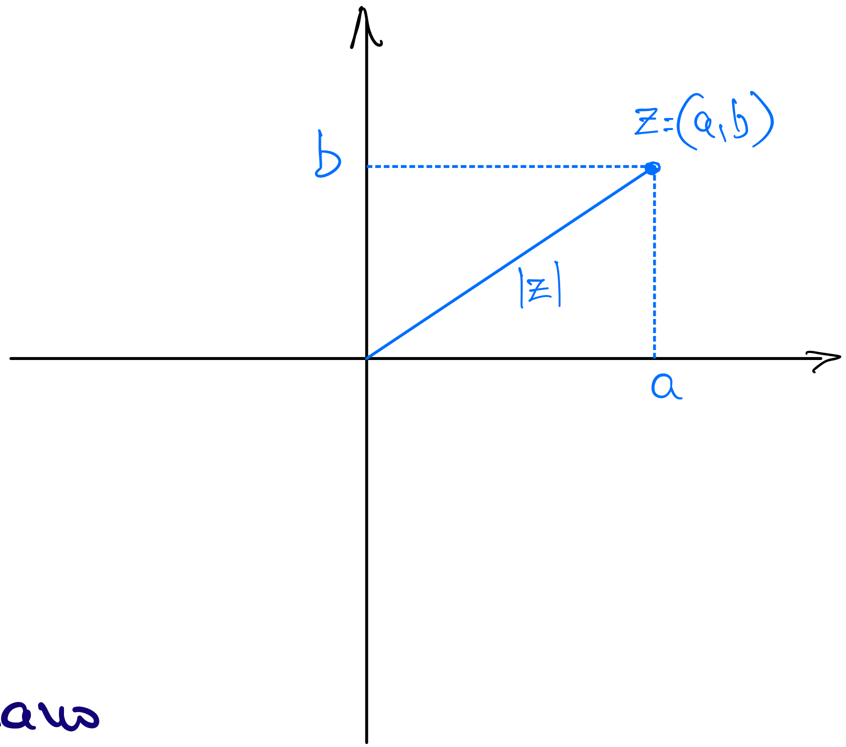
Isto é,

$$\boxed{(a,b)^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2} \cdot (a,-b)}$$

Um pouco de geometria para entender $\mathbb{C}$

Definimos os números complexos como pares ordenados de números reais:

$$\mathbb{C} = \{ (a,b) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

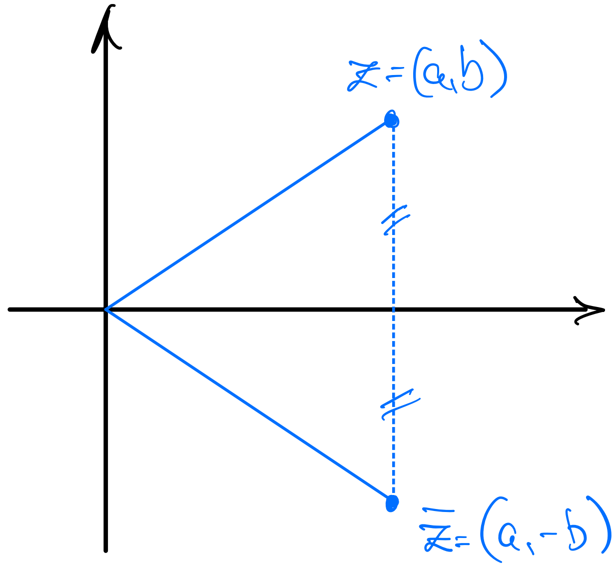


Podemos, portanto, representar $\mathbb{C}$ no plano cartesiano $\mathbb{R}^2$.

Definimos o valor absoluto do número complexo $z = (a,b)$ como a distância de z à origem $O = (0,0)$:

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

O conjugado complexo



Há uma operação simples, mas muito importante, que fazemos com números complexos: tomar o conjugado

$$z=(a,b) \Rightarrow \bar{z}=(a,-b)$$

$\bar{z}$ é o número complexo conjugado a z.

Voltando ao inversos multiplicativos:

$$\boxed{(a,b)^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right) \Longleftrightarrow z^{-1}=\frac{\bar{z}}{|z|^2}}$$

$\mathbb{R}$ dentro de $\mathbb{C}$

Há, claro, muitas cópias de $\mathbb{R}$ dentro de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, mas há apenas uma que respeita as operações $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{C}$ e torna-as as mesmas de $\mathbb{R}$.

Os números complexos da forma $(a,0)$ formam, claro, uma cópia de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{C}$. Além disso, as operações $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{C}$ preservam esse conjunto e são exatamente as operações $+$ e $\cdot$ de $\mathbb{R}$.

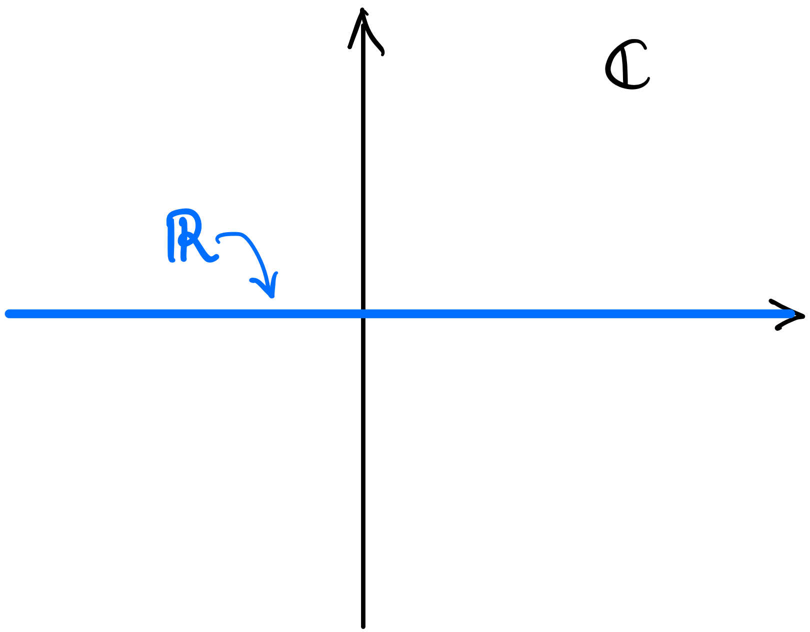
$$(a,0)+(b,0) = (a+b,0)$$
$$(a,0)\cdot(b,0) = (ab,0)$$

Exercício: Verifique que está tudo certo, realmente, isto é, que $\mathbb{R}$ é mesmo um subcorpo de $\mathbb{C}$.

Os elementos neutros $(0,0)$ e $(1,0)$ são dessa forma.

Assim, consideramos $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, identificando os números:

$$\mathbb{R} \ni a \longleftrightarrow (a,0) \in \mathbb{C}$$



$x^2+1=0$ tem soluções em $\mathbb{C}$

Em $\mathbb{C}$, lembre-se que o elemento neutro multiplicativo é

$$(1,0) = 1,$$

que é o mesmo elemento neutro multiplicativo de $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.
Da mesma forma, o elemento neutro aditivo é

$$(0,0) = 0$$

que também coincide com o elemento neutro de $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Resolver $x^2+1=0$ em $\mathbb{C}$ é encontrar um número complexo $x=(a,b)$ cujo quadrado é o inverso aditivo de $(1,0)$, isto é, queremos que $(a,b)^2 = (-1,0)$.

$$(a,b)^2 = (a,b)\cdot(a,b) = (a^2-b^2,\ 2ab).$$

Precisamos então que

$$\begin{cases} a^2-b^2 = -1 \Longrightarrow \boxed{a=0 \text{ e } b^2=1} \\ 2a.b = 0 \iff a=0 \text{ ou } b=0 \end{cases}$$

Isto é, $(0,1)$ e $(0,-1)$ são raízes de $x^2+1=0$ e são as únicas tais raízes.

Denotamos $\boxed{i=(0,1)}$ e, portanto, $\boxed{-i=(0,-1)}$ e $\pm i$ são, assim, as duas raízes de

$$x^2+1=0.$$

isto é,

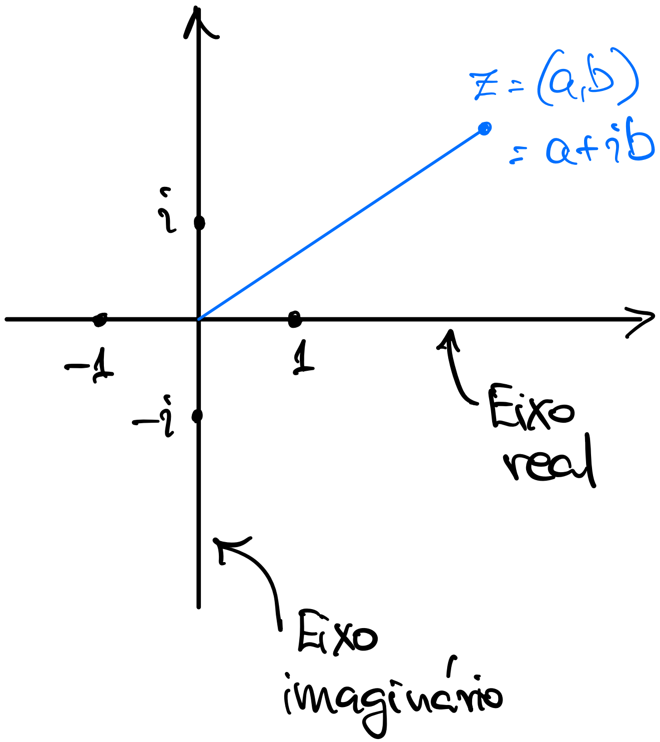
$$i^2=-1 \quad \text{e} \quad (-i)^2=-1.$$

i é a "partícula imaginária"

Podemos escrever todo número complexo

$$z = (a,b) = a\cdot(1,0) + b\cdot(0,1)$$
$$= a\cdot 1 + b\cdot i$$

$$\boxed{z = a + ib}$$



Assim

$$\bar{z} = (a,-b) = a - ib$$

e

$$z\cdot\bar{z} = (a+ib)\cdot(a-ib) = a^2 - iab + iab - (ib)^2$$
$$= a^2 - i^2\cdot b^2 \underset{i^2=-1}{=} a^2 + b^2 = |z|^2$$

Isto é,

$$\boxed{z\cdot\bar{z} = |z|^2}$$

Funções de variáveis complexas

É possível definir (e estudar) funções de variáveis complexas como e^z, $\cos z$, $\operatorname{sen} z$, ..., onde $z = x+iy \in \mathbb{C}$. Não vamos muito a fundo nesses assuntos, mas vamos falar um pouco da exponencial e^z.

Como já dissemos em sala 643 vezes, estamos assumindo que conhecemos as expansões em séries de potências seguintes:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Usando essas expansões e $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ e $i^4 = 1$, provamos a

$$\boxed{\text{Fórmula de Euler: } \quad e^{iy} = \cos y + i \,\mathrm{sen}\, y, \quad \forall y \in \mathbb{R}}$$

Definimos, para $z \in \mathbb{C}$, a exponencial pela mesma série de potências

$$\boxed{e^{z} = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}$$

Sendo assim, se $z = x + iy$, deveria ser também o caso que

$$e^{z} = e^{(x+iy)} = e^{x} \cdot e^{iy} = e^{x}(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

Para isso seria bom termos certeza de que a igualdade

$$\boxed{e^{z+w} = e^{z} \cdot e^{w}}$$

vale para números complexos também.

Obs. Deveríamos, por que não?, pensar se $e^{A+B} = e^{A} \cdot e^{B}$ para matrizes quadradas A e B também. Veremos, na prova a seguir, que isso vale desde que $A \cdot B = B \cdot A$.

Lembre-se da fórmula binomial

$$(*) \qquad (z+w)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} z^{n-k} w^k$$

Aqui $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ $\qquad$ (e $\binom{n}{0} = 1$)

Podemos reescrever $(*)$ da seguinte forma

$$(z+w)^n = \sum_{j+k=n} \frac{n!}{j!\,k!} z^j w^k$$

isto é, some sobre todas as escolhas de naturais $j, k \geq 0$ tais que $j+k=n$.

Portanto

$$e^{z+w} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{z^j}{j!} \frac{w^k}{k!}$$

Por outro lado

$$e^z \cdot e^w = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{z^j}{j!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!}$$

$$= \left(1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots\right) \cdot \left(1 + w + \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!} + \cdots\right)$$

$$= 1 + (z+w) + \left(\frac{z^2}{2!} + zw + \frac{w^2}{2!}\right) + \left(\frac{z^3}{3!} + \frac{z^2}{2!} \cdot w + z \cdot \frac{w^2}{2!} + \frac{w^3}{3!}\right) + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{z^j}{j!} \cdot \frac{w^k}{k!} = e^{(z+w)}$$

Isto é, acabamos de provar que vale

$$e^{(z+w)} = e^{z} \cdot e^{w}$$

desde que valha o Teorema Binomial

$$(z+w)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} z^{n-k} w^k$$

Mas por que mesmo vale o Teorema Binomial ?

Prova por exemplo (!) :

$$(z+w)^2 = (z+w)\cdot(z+w) = z^2 + zw + wz + w^2 = z^2 + 2zw + w^2$$

$$(z+w)^3 = (z+w)^2 \cdot (z+w) = \left(z^2 + 2zw + w^2\right)\cdot(z+w) =$$

$$= z^3 + z^2 w + 2zwz + 2zw^2 + w^2 z + w^3 = z^3 + 3z^2 w + 3zw^2 + w^3$$

Escrevemos os produtos passo-a-passo para enfatizar que tivemos que usar a comutatividade do produto $zw = wz$, que sabemos valer para números reais e complexos, para chegar ao resultado usual do Teorema Binomial. Não fora isso, no entanto, nós poderíamos ter combinado termos como

$$z^2w + 2zwz = 3z^2w \quad \text{e} \quad 2zw^2 + w^2z = 3zw^2$$

Mas se assumimos que as matrizes A e B comutam, isto é, que $A \cdot B = B \cdot A$, então exatamente a mesma prova se aplica e prova o teorema

$$\boxed{e^{(A+B)} = e^{A} \cdot e^{B} \quad \text{para todas matrizes quadradas } A, B \text{ tais que } A \cdot B = B \cdot A}$$

Assim, mostramos que, definindo $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, vale

$$e^{z+w} = e^z \cdot e^w$$

já que o produto de números complexos é comutativo.

Em particular, se $z = x + iy$, com $x, y \in \mathbb{R}$, vale

$$\boxed{e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y)}$$

onde usamos a Fórmula de Euler.

<u>Ex</u>: $e^{3-2i} = e^3 (\cos 2 + i \operatorname{sen} 2)$

$e^{i\pi/2} = \cos \pi/2 + i \operatorname{sen} \pi/2 = i$