MAT0164 - Trabalho 1 (17/04/2023)

Nome:
Número USP:
Assinatura:

1) **(3 pontos)** Sejam p, q e r sentenças. Escreva uma tabela verdade para a fórmula

$$(\neg p \Rightarrow r) \wedge ((q \Rightarrow p) \vee (r \Rightarrow \neg q)).$$

Solução: Vamos construir a tabela verdade dividindo a fórmula em sentenças menores cujos valores lógicos podem ser aferidos com mais facilidade. Para o obter o valor lógico da fórmula, precisamos primeiramente encontrar $\neg p$ e $\neg q$, e em seguida realizar as implicações $\neg p \Rightarrow r, q \Rightarrow p$ e $r \Rightarrow \neg q$ que estão entre parênteses, e finalmente calcular os valores para cada possibilidade de p, q e r. Dessa forma, obtemos a seguinte tabela verdade:

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \Rightarrow r$	$q \Rightarrow p$	$r \Rightarrow \neg q$	$(q \Rightarrow p) \vee (r \Rightarrow \neg q)$	$(\neg p \Rightarrow r) \wedge ((q \Rightarrow p) \vee (r \Rightarrow \neg q))$
V	V	V	F	F	V	V	F	V	V
V	V	F	F	F	V	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	V	V	F
F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	V	V	F

2) **(3 pontos)** Sejam P e Q sentenças abertas que dependem de duas e três variáveis, respectivamente. Escreva uma negação da seguinte sentença de modo que o símbolo $\neg$ aparece (possivelmente) em frente apenas de P e Q:

$$\forall x\Big(\forall y\Big(P(x,y) \Rightarrow \exists z Q(x,y,z)\Big) \vee \exists z\Big(Q(z,x,z) \Leftrightarrow \neg P(x,x)\Big)\Big).$$

Solução: A negação da sentença pode ser obtida utilizando as propriedades de negação dos quantificadores universal e existencial, as equivalências

$$p \to q \Leftrightarrow (\neg p \vee q) \quad \text{e} \quad p \leftrightarrow q \Leftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$$

e as Leis de De Morgan, como segue:

$$\begin{aligned}
& \neg\Big(\forall x\Big(\forall y\Big(P(x,y) \Rightarrow \exists z Q(x,y,z)\Big) \vee \exists z\Big(Q(z,x,z) \Leftrightarrow \neg P(x,x)\Big)\Big)\Big) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x \neg\Big(\forall y\Big(P(x,y) \Rightarrow \exists z Q(x,y,z)\Big) \vee \exists z\Big(Q(z,x,z) \Leftrightarrow \neg P(x,x)\Big)\Big) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x\Big(\exists y \neg\Big(P(x,y) \Rightarrow \exists z Q(x,y,z)\Big) \wedge \forall z \neg\Big(Q(z,x,z) \Leftrightarrow \neg P(x,x)\Big)\Big) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x\Big(\exists y \neg\Big(\neg P(x,y) \vee \exists z Q(x,y,z)\Big) \wedge \forall z \neg\Big((Q(z,x,z) \vee \neg(\neg P(x,x))) \wedge (\neg Q(z,x,z) \vee \neg P(x,x))\Big)\Big) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x\Big(\exists y\Big(\neg(\neg(P(x,y)) \wedge \neg\big(\exists z Q(x,y,z)\big)\Big) \wedge \forall z\Big(\neg\big(Q(z,x,z) \vee P(x,x)\big) \vee \neg\big(\neg Q(z,x,z) \vee \neg P(x,x)\big)\Big)\Big) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x\Big(\exists y\Big(P(x,y) \wedge \forall z \neg Q(x,y,z)\Big) \wedge \forall z\Big(\big(\neg Q(z,x,z) \wedge \neg P(x,x)\big) \vee \big(\neg(\neg Q(z,x,z)) \wedge \neg(\neg P(x,x))\big)\Big)\Big) \\
\Leftrightarrow\ & \exists x\Big(\exists y\Big(P(x,y) \wedge \forall z \neg Q(x,y,z)\Big) \wedge \forall z\Big(\big(\neg Q(z,x,z) \wedge \neg P(x,x)\big) \vee \big(Q(z,x,z) \wedge P(x,x)\big)\Big)\Big)
\end{aligned}$$

Assim, a resposta desejada é

$$\boxed{\exists x\Big(\exists y\Big(P(x,y) \wedge \forall z \neg Q(x,y,z)\Big) \wedge \forall z\Big(\big(\neg Q(z,x,z) \wedge \neg P(x,x)\big) \vee \big(Q(z,x,z) \wedge P(x,x)\big)\Big)\Big)}$$

3) (4 pontos) Prove (o mais detalhadamente que você puder) a seguinte sentença:

$$\forall A, B, C\,(A - (B \cup C) = (A - B) - C).$$

Solução:

1ª Solução: Para provar esta igualdade entre conjuntos, precisamos verificar que $\forall x\Big(x \in A - (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A - B) - C\Big)$, ou equivalentemente, que $A - (B \cup C) \subseteq (A - B) - C$ e que $(A - B) - C \subseteq A - (B \cup C)$.

- $\boldsymbol{A - (B \cup C) \subseteq (A - B) - C}$ **:**

  Seja $x \in A - (B \cup C)$. Então, da definição de diferença entre conjuntos, $x \in A$ e $x \notin B \cup C$. Agora, se $x \notin B \cup C$, então x não pertence nem a B e nem e C, logo $x \notin B$ e $x \notin C$. Já que $x \in A$ e $x \notin B$, consequentemente $x \in A - B$. Mas também temos que $x \notin C$. Dessa constatação advém que $x \in (A - B) - C$, o que completa a demonstração.

- $\boldsymbol{(A - B) - C \subseteq A - (B \cup C)}$ **:**

  Seja $x \in (A - B) - C$. Da definição de diferença entre conjuntos, vem que $x \in A - B$ e $x \notin C$. Aplicando novamente esta definição, vemos que $x \in A - B$ implica $x \in A$ e $x \notin B$. Agora, como $x \notin C$ e $x \notin B$, podemos afirmar que $x \notin B \cup C$. Daí, como $x \in A$, concluímos que $x \in A - (B \cup C)$, como requerido.

Portanto, da definição de igualdade de conjuntos, temos $A - (B \cup C) = (A - B) - C$.

2ª Solução: Vamos traduzir a igualdade entre conjuntos apresentada em uma fórmula da lógica proposicional. Para isso, observe que devemos verificar que

$$\forall x\Big(x \in A - (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A - B) - C\Big).$$

Das definições de união e diferença entre conjuntos, obtemos

$$\forall x\Big(x \in A - (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A - B) - C\Big)$$

$$\forall x\Big(x \in A \wedge x \notin (B \cup C) \Leftrightarrow x \in (A - B) \wedge x \notin C\Big)$$

$$\forall x\Big(x \in A \wedge (x \notin B \;\wedge x \notin C) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \wedge x \notin C\Big)$$

Dessa maneira, definindo as sentenças:

$$p : x \in A \qquad q : x \in B \qquad r : x \in C,$$

podemos reescrever a expressão obtida acima como sendo a fórmula

$$f : p \wedge (\neg q \ \wedge \neg r) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q) \wedge \neg r$$

Agora, basta averiguar se esta sentença corresponde a uma tautologia. Utilizando uma tabela verdade, obtemos:

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$\neg q \wedge \neg r$	$p \wedge \neg q$	$p \wedge (\neg q \wedge \neg r)$	$(p \wedge \neg q) \wedge \neg r$	f
V	V	V	F	F	F	F	F	F	V
V	V	F	F	V	F	F	F	F	V
V	F	V	V	F	F	V	F	F	V
V	F	F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F	F	F	V
F	V	F	F	V	F	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	F	F	F	V

Como na última coluna os valores lógicos correspondem a V (verdadeiro) em sua totalidade, concluímso que de fato f trata-se de uma tautologia, significando que a igualdade inicial é verdadeira, ou seja, que $A - (B \cup C) = (A - B) - C$.