ALGUNS EXERCÍCIOS RELACIONADOS À QUARTA SEMANA

Todos exercícios abaixo são do Strang, com exceção dos dois primeiros, baseados no livro do Allaire e Kaber (Numerical Linear Algebra).

Exercício 1. (Seção 4.5, Problema 4.2 Allaire e Kaber) Sejam $A, B \in M_{n,n}(\mathbb{R})$.

a) Suponha que A seja triangular inferior. Mostre que a complexidade para o cálculo de $C = AB$ é $\sim \frac{n^3}{2}$.

b) Suponha que A e B sejam triangulares inferiores. Mostre que a complexidade para o cálculo de $C = AB$ é $\sim \frac{n^3}{6}$.

(Acima o que queremos dizer é que se $\mathcal{C}_n$ é o número de multiplicações e divisões necessárias para calcular C, então $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{C}_n}{n^3/2} = 1$ no item a e $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathcal{C}_n}{n^3/6} = 1$ no item b).

c) Descreva um algoritmo para cada um dos itens anteriores (uma maneira de realizar as contas acima) para calcular C evitando multiplicações desnecessárias (do tipo zero vezes alguma coisa).

Exercício 2. (Seção 4.3, Allaire e Kaber) Sejam $A, B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$.

a) Mostre que o método usual de calcular AB envolve 8 multiplicações.

b) Verifique método abaixo (método de Strassen) e note que ele envolve apenas 7 multiplicações:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_1 + m_2 - m_4 + m_6 & m_4 + m_5 \\ m_6 + m_7 & m_2 - m_3 + m_5 - m_7 \end{bmatrix},$$

em que

$$\begin{array}{ll} m_1 = (b-d)(\gamma+\delta) & m_5 = a(\beta-\delta) \\ m_2 = (a+d)(\alpha+\delta) & m_6 = d(\gamma-\alpha) \\ m_3 = (a-c)(\alpha+\beta) & m_7 = (c+d)\alpha \\ m_4 = (a+b)\delta & \end{array}$$

Exercício 3. (Seção 2.1, Problema 4)

Qual é o menor subespaço de $M_{3,3}(\mathbb{R})$ que contém todas as matrizes simétricas ($A_{ij} = A_{ji}$) e todas as matrizes triangulares superiores? Qual é o maior subespaço que está contido nesses dois espaços? Qual a dimensão dos espaços descritos anteriormente?

Exercício 4. (Seção 2.1, Problema 20) Verdadeiro ou falso para matrizes 3 por 3.

(a) As matrizes anti-simétricas ($A^T = -A$) formam um subespaço.

(b) As matrizes não simétricas ($A^T \neq A$) formam um subespaço.

(c) As matrizes que têm $(1, 1, 1)$ em seu espaço nulo formam um subespaço.

Exercício 5. (Seção 2.1, Problema 22) Para quais valores à direita (ache condições necessárias e suficientes em b_1, b_2 e b_3) as equações abaixo tem solução:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$.

Exercício 6. (Seção 2.1, Problema 25) Se adicionamos uma coluna extra b à matriz A, então o espaço coluna de A se torna maior, a não ser que _______ (complete!).

Dê um exemplo em que o espaço coluna se torna maior e um exemplo em que ele permanece igual.

Por que $Ax = b$ tem solução exatamente quando o espaço coluna não fica maior ao adicionar b?

Exercício 7. (Seção 2.1, Problema 30) Seja $Ax = b$ um sistema com 9 equações e 12 variáveis. Se $Ax = b$ tem solução para todo b, quem é $C(A)$?

Exercício 8. (Seção 2.2, Problema 5) Escreva as soluções completas $x = x_p + x_n$ para os sistemas abaixo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Exercício 9. (Seção 2.2, Problema 7) Ache os valores de c que fazem com que seja possível resolver $Ax = b$ e resolva o problema:

$$\begin{aligned} u + v + 2w &= 2 \\ 2u + 3v - w &= 5. \\ 3u + 4v + w &= c \end{aligned}$$

Exercício 10. (Seção 2.2, Problema 33) Ache as soluções completas de

$$\begin{aligned} x + 3y + 3z &= 1 \\ 2x + 6y + 9z &= 5, \\ -x - 3y + 3z &= 5 \end{aligned} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 11. (Seção 2.2, Problema 68) Mostre com um exemplo que essas três afirmações são geralmente falsas:

a) A e A^T têm o mesmo espaço nulo.
b) A e A^T têm as mesmas variáveis livres.
c) Se R é a forma escalonada reduzida de A, então R^T é a forma escalonada reduzida de A^T.

Problema 12. (Seção 2.3, Problema 5) Verifique se os vetores abaixo são linearmente dependentes ou linearmente independentes:

a) $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$ e $(3, 2, 1)$.
b) $(1, -3, 2)$, $(2, 1, -3)$ e $(-3, 2, 1)$.