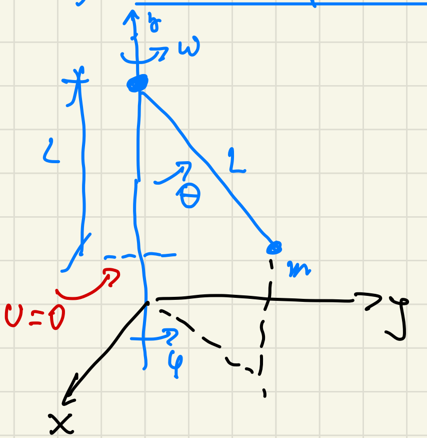
VII) Pêndulo fixo a um eixo girando

18/4/23



Posição da massa é determinada por θ e φ: $q_1 \equiv \theta$ $q_2 \equiv \varphi$

$$\vec{V} = L\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + L\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$L = T - U$$

$$L = \frac{m}{2}\left(L^2\dot{\theta}^2 + L^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) - mgL(1-\cos\theta)$$

Cuidado, existe um torque G que o eixo aplica sobre o sistema! Devemos introduzir uma força generalizada na direção $k=2$ (φ). O trabalho do torque é $G\delta\varphi$ $\Rightarrow Q_2 = G$. Apliquemos

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right] - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

$k=1 \Rightarrow mL^2\ddot{\theta} - mL^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2 + mgL\,\mathrm{sen}\,\theta = 0$ $(Q_1 = 0)$

$k=2$ $\frac{d}{dt}\left[mL^2\sin^2\theta\,\dot{\varphi}\right] = G$

Para prosseguir precisamos conhecer G! <u>Hipótese:</u> G ajustado para que $\dot{\varphi} = \omega =$ constante. Isso equivale a um sistema com Lagrangiana

$$L = \frac{mL^2}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\omega^2\right) - mgL(1-\cos\theta) \equiv T' + V'$$

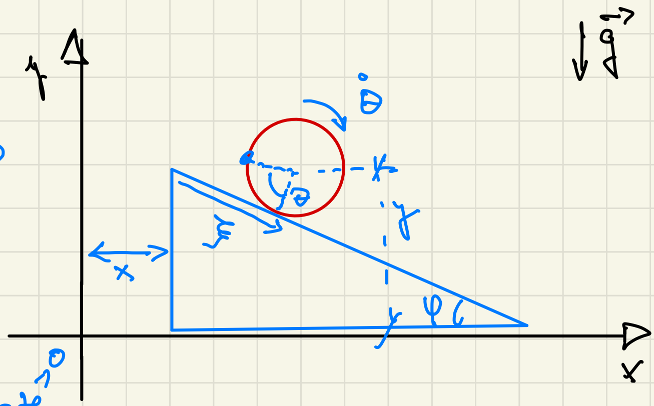
onde $T' = \frac{mL^2}{2}\dot{\theta}^2$ e $V' = mgL(1-\cos\theta) - \frac{mL^2}{2}\sin^2\theta\,\omega^2$!

Estudo os movimentos deste sistema.

<u>VII</u>) Esfera de raio R e massa m que rola sem escorregar sobre um plano inclinado de massa M. O plano inclinado pode mover-se horizontalmente sem atrito

Condição inicial ($t=0$):

$x = 0,\ y = h,\ \theta = 0;\ \dot{x} = 0 = \dot{\theta} = 0$



Rola sem escorregar é um vínculo holonômico

$$R\dot{\theta} = \dot{\xi} \Rightarrow \xi = R\theta + \cancel{c^{te}}^{\,0}$$

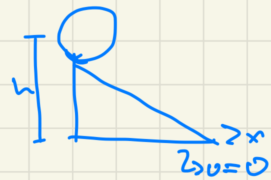
$$T_{plano} = \frac{M}{2}\dot{x}^2\ ;$$

$$\vec{v}_{cm} = (\dot{x} + \dot{\xi}\cos\varphi)\vec{i} - \dot{\xi}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{j} = (\dot{x} + R\dot{\theta}\cos\varphi)\vec{i} - R\dot{\theta}\,\mathrm{sen}\,\varphi\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow T_{esfera} = T_{CM} + \frac{1}{2} m \vec{v}_{CM}^{\,2} = \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\cos\varphi\,\dot{x}\dot{\theta}\right)$$

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

$$\therefore T = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + R^2\dot{\theta}^2 + 2R\cos\varphi\,\dot{x}\dot{\theta}\right) + \frac{mR^2}{5}\dot{\theta}^2$$



$$U = mg\,(h - R\theta \operatorname{sen}\varphi)$$

$$L = T - U = \frac{(m+M)}{2}\dot{x}^2 + \frac{7}{10} m R^2 \dot{\theta}^2 + mR\cos\varphi\,\dot{x}\dot{\theta} - mg\,(h - R\theta \operatorname{sen}\varphi)$$

$$q_k = x \Rightarrow (M+m)\ddot{x} + m\cos\varphi R\ddot{\theta} = 0$$

$$q_k = \theta \Rightarrow \frac{7}{5} m R^2 \ddot{\theta} + m\cos\varphi R\ddot{x} = mgR\theta \operatorname{sen}\varphi$$

$$\ddot{x} = -\frac{m\cos\varphi R}{M+m}\ddot{\theta} \quad (*) \quad \Longrightarrow$$

$$\left(\frac{7}{5} - \frac{m\cos^2\varphi}{M+m}\right)\ddot{\theta} = g\,\frac{\sin\varphi}{R}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{5(M+m)\sin\varphi}{2\left(7(M+m) - 5m\cos^2\varphi\right)R}\, g t^2$$

cond. iniziais (*) (?)

$$x = -\frac{mR\cos\varphi}{m+M}\,\theta = \frac{5m\sin(2\varphi)}{4\left(7(M+m) - 5m\cos^2\varphi\right)}\, g t^2$$

3.3 Mudança genérica de coordenadas

Na obtenção da eq. de Euler-Lagrange não mencionamos o sistema de coordenadas. Logo, estas equações devem ser invariantes por mudança de coordenadas!! Provemos isso!

Seja $Q_1 \ldots Q_n$ um novo sistema de coordenadas tal que

$$Q_k = G_k(q_1 \ldots q_n\, t) \implies$$ essa transformação deve ser inversível.

e $$q_k = g_k(Q_1 \ldots Q_n\, t) \quad (*)$$

Mais: $$\frac{\partial(q_1 \ldots q_n)}{\partial(Q_1 \ldots Q_n)} = \det\left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_\ell}\right) \neq 0$$

A transformação bijetiva G (com $g = G^{-1}$) é chamada difeomorfismo.

Prova: $$\dot{q}_k \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial q_k}{\partial Q_j}\dot{Q}_j + \frac{\partial q_k}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_\ell} = \frac{\partial q_k}{\partial Q_\ell}.$$ Guardemos este resultado.

Na troca de coordenadas: $\bar{L}(Q, \dot{Q}, t) = L(q(Q,t), \dot{q}(Q,\dot{Q},t), t)$

$$\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i} = \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k}\underbrace{\frac{\partial q_k}{\partial \dot{Q}_i}}_{0} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i} \right) = \sum_k \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\boxed{\frac{\partial \dot{q}_k}{\partial \dot{Q}_i}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i}\right) = \sum_k \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q_k}{\partial Q_i}\right) \right\}$$

provamos anteriormente

$$= \sum_k \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_i} \right\}$$

Por outro lado $\displaystyle \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_i} = \sum_k \left(\frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_i} \right)$

Logo

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \bar{L}}{\partial \dot{Q}_i}\right) - \frac{\partial \bar{L}}{\partial Q_i} = \sum_k \left\{ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_i}} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial \dot{q}_k}{\partial Q_i}} \right\}$$

$$= \sum_k \underbrace{\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} \right)}_{=0} \frac{\partial q_k}{\partial Q_i} = 0$$

$\hookrightarrow$ Lembre-se det $\dfrac{\partial q_k}{\partial Q_i} \neq 0$

3.4 Potenciais generalizados

Consideremos forças tais que

derivada total!

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right)$$

Neste caso, definindo $L = T - U$ do "princípio" de d'Alembert temos a eq. de Euler-Lagrange novamente. Mostre isso!

Mas isso faz sentido?

Força de Lorentz

Uma partícula com carga elétrica q na presença do campo magnético $\vec{B}$ e do campo elétrico $\vec{E}$ sofre uma força

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\,\vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

no sistema de unidades CGS gaussiano.

A partir das eq's de Maxwell podemos escrever

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \vec{B} = \nabla \wedge \vec{A}$$

ϕ = potencial escalar $\qquad$ $\vec{A}$ = potencial vetor então

$$\vec{F} = q\left[-\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \frac{1}{c}\vec{v}\wedge(\nabla\wedge\vec{A})\right]$$

Aqui temos $\frac{\partial}{\partial t}$ mas na expressão para a força generalizada aparece $\frac{d}{dt}$:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} \underset{\text{coord. cartesiana}}{=} \frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\dot{z} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

Além disso $\nabla(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\vec{a}\cdot\nabla)\vec{b} + (\vec{b}\cdot\nabla)\vec{a} + \vec{a}\wedge(\nabla\wedge\vec{b}) + \vec{b}\wedge(\nabla\wedge\vec{a})$

$\vec{a} = \vec{A}$, $\vec{b} = \vec{v}$

$$\Rightarrow \vec{v}\wedge(\nabla\wedge\vec{A}) = \nabla(\vec{v}\cdot\vec{A}) - (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}$$

Com isso $\vec{F} = q\left[-\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{1}{c}\nabla(\vec{v}\cdot\vec{A})\right]$

$$= q\left[-\nabla\left(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}\right) - \frac{1}{c}\frac{d\vec{A}}{dt}\right]$$

Massageemos o último termo para deixá-lo da forma do 1º.
Para isso definimos

$$\nabla_{\vec{v}} = \frac{\partial}{\partial v_x}\vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial v_y}\vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial v_z}\vec{e}_z$$

Isso permite escrever $\vec{A} = \nabla_{\vec{v}} (\vec{v}\cdot\vec{A})$ já que $\vec{A}$ independe de $\vec{v}$. Mais ϕ também independe de $\vec{v}$

$$-\vec{A} = \nabla_{\vec{v}}\left(\phi - \vec{v}\cdot\vec{A}\right)$$ Logo

$$\vec{F} = -\nabla\left(q\phi - \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}\right) + \frac{d}{dt}\left(\nabla_{\vec{v}}\left(q\phi - \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}\right)\right)$$

Definimos o potencial generalizado como

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k}\right)$$

Com isso $U = q\phi - \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}$

Finalmente:

$$\boxed{L = T - U = \frac{m}{2}\vec{v}^{\,2} - q\phi + \frac{q}{c}\vec{v}\cdot\vec{A}}$$

Exemplo: $\vec{B} = B\vec{e}_z \Rightarrow \vec{A} = \frac{B}{2}(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y) \Rightarrow L = \frac{m\vec{v}^2}{2} + \frac{qB}{2c}(-v_x y + v_y x)$

3.5 Conservação de energia (de novo!)

Seja L a Lagrangiana do sistema e que ela não depende explicitamente no tempo, i.e., $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$. Agora

$$\frac{d}{dt}L(q_k, \dot{q}_k) = \frac{\partial L}{\partial q_k}\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d}{dt}(\dot{q}_k)$$

Para soluções das EOM $\Rightarrow \frac{d}{dt}L = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right)\dot{q}_k + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\frac{d}{dt}(\dot{q}_k) \Rightarrow$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L\right] = 0$$

Logo, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\dot{q}_k - L$ é conservada! No caso de 1 grau de liberdade c/ $L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - U(q)$ a quantidade conservada é

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{m\dot{q}^2}{2} - U(q)\right) - \frac{m\dot{q}^2}{2} + U(q) = m\dot{q}^2 - \frac{m\dot{q}^2}{2} + U(q) = \frac{m\dot{q}^2}{2} + U(q)$$

que é a energia!

Exercício: Considere uma partícula na presença de campos elétrico e magnéticos independentes do tempo. Qual a energia da partícula?

3.6 Variáveis cíclicas

Se a Lagrangiana de um sistema não depende de uma coordenada esta é chamada cíclica. Existe uma quantidade conservada para cada variável cíclica. De fato, trivialmente da eq. de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right] = \frac{\partial L}{\partial q_k} \underset{\uparrow}{=} 0$$

se q_k é cíclico

$\therefore \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ é conservada!

Exemplos:

1) Partícula livre em coordenadas cartesianas

$L = \sum_k \frac{m}{2} \dot{x}_k^2 \rightarrow$ independe de x_k

$\therefore \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_k} = m\dot{x}_k$ é conservado (momento)

2) Para o pêndulo esférico vimos que

$$L = \frac{m}{2}\left(l^2\dot{\theta}^2 + l^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2\right) - mgl\,(1-\cos\theta)$$

que independe de φ. Logo

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}$ é conservada.