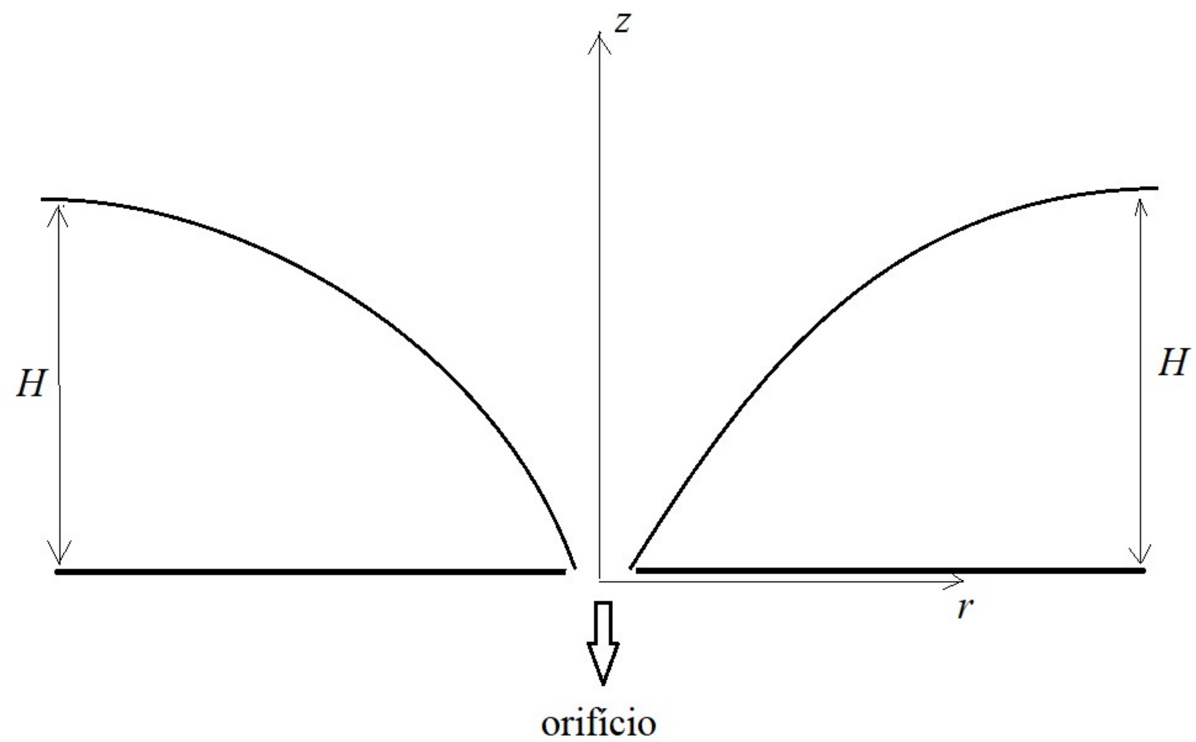
PME3330 – Mecânica dos Fluidos II

Exercícios – Equações de Euler e Bernoulli

Ex. 4.60) Um líquido é drenado por um pequeno orifício no centro de um tanque. O campo de velocidades é dado por $\upsilon_r \cong 0$, $\upsilon_z \cong 0$, $\upsilon_\theta \cong C/r$, sendo H a profundidade da água bem longe do orifício $(r \to \infty)$. O escoamento é rotacional ou irrotacional? Encontre a profundidade *z=z(r)* da água para um raio qualquer r.



Para verificar se o escoamento é rotacional ou irrotacional:

$$rot\,\vec{V} = \nabla \times \vec{V} = 0$$

Usando o sistema cilíndrico de coordenadas:

$$\nabla \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{r\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \upsilon_r & \upsilon_\theta & \upsilon_z \end{vmatrix} + \frac{\upsilon_\theta}{r}\vec{e}_z = \begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{r\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \dfrac{C}{r} & 0 \end{vmatrix} + \frac{C}{r^2}\vec{e}_z = 0$$

Logo, o escoamento é irrotacional. Isso significa que podemos usar a equação de Bernoulli aplicada a todo o campo de escoamento:

$$\frac{V^2}{2}+\frac{p}{\rho}+gz=\text{constante}$$

Aplicando a equação de Bernoulli entre dois pontos na superfície do líquido, um bem longe do orifício $\left(r \rightarrow \infty, \upsilon_\theta \rightarrow 0\right)$, e o outro na posição z para um raio r arbitrário, onde $\upsilon_\theta = C/r$, e lembrando que em ambos os pontos a pressão é atmosférica:

$$\frac{C^2/r^2}{2}+\frac{p_{atm}}{\rho}+g\,z=0+\frac{p_{atm}}{\rho}+g\,H$$

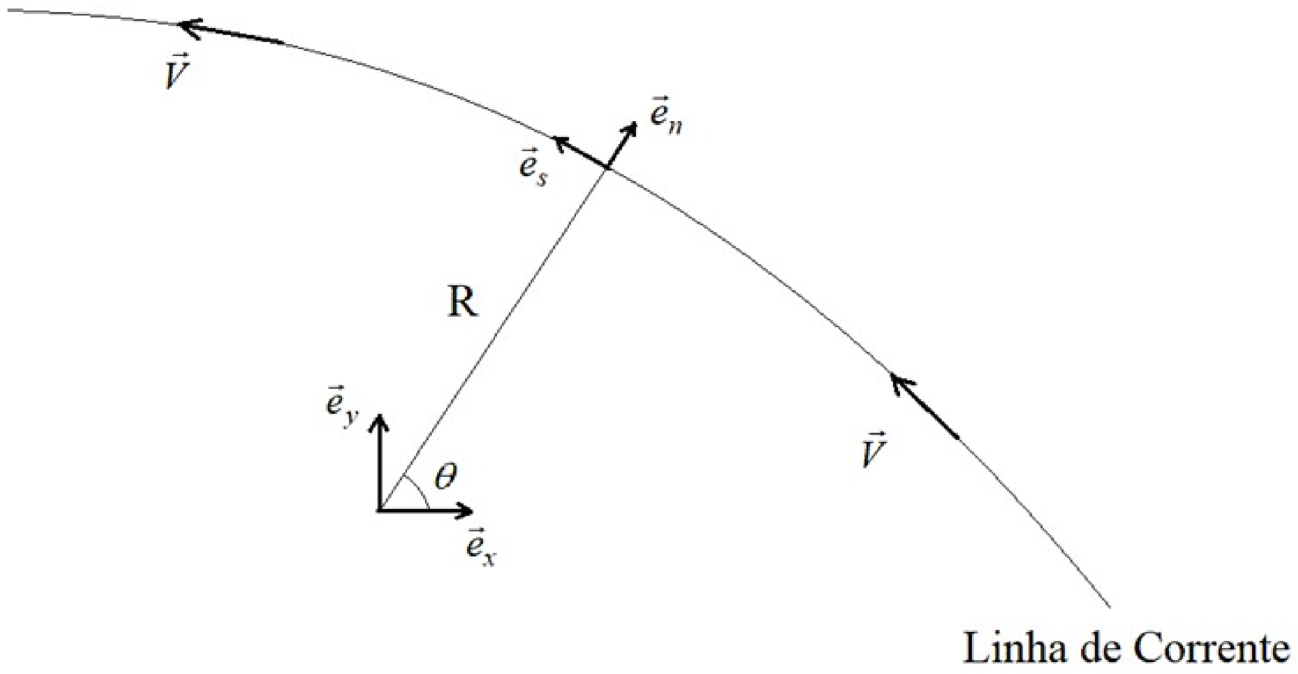
Temos então:

$$\boxed{z=H-\frac{C^2/r^2}{2g}}$$

Exercício 4.26: Coordenadas Curvilíneas, ou de linha de corrente, estão definidas na figura, onde *n* é a direção normal à linha de corrente em um ponto, *s* é a direção tangencial e *R* é o raio de curvatura nesse ponto. Mostre que a equação de Euler fica:

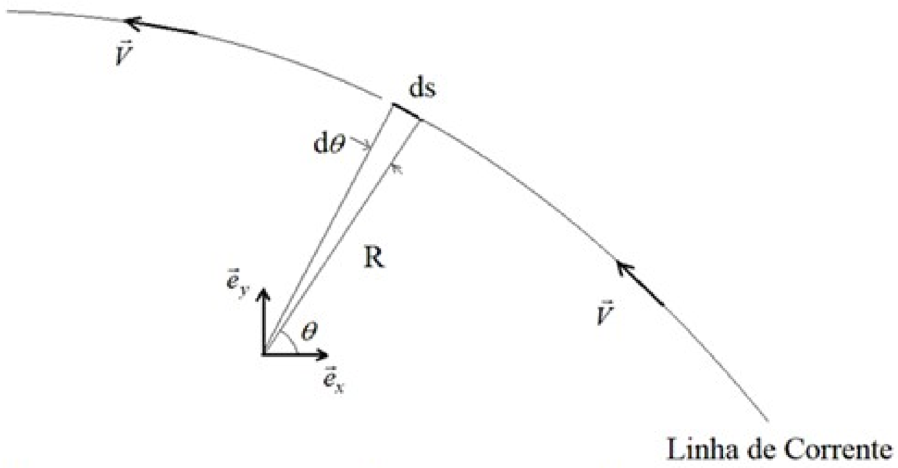
$$\frac{\partial V}{\partial t}+V\frac{\partial V}{\partial s}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s}+g_s \qquad -V\frac{\partial \theta}{\partial t}-\frac{V^2}{R}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n}+g_n$$

Mostre também que a integral da primeira equação é a equação de Bernoulli.



Um sistema de coordenadas orientado de acordo com o vetor da velocidade é chamado de Sistema Intrínseco de Coordenadas. Dado o raio de curvatura em um ponto da linha de corrente, podemos construir os versores $\vec{e}_n$ e $\vec{e}_s$ de uma forma similar à usada para construir um sistema cilíndrico de coordenadas, como visto em aula. Temos que:

$$\vec{e}_n = \cos\theta\,\vec{e}_x + \operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_y \qquad \vec{e}_s = -\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$$



Também cumpre lembrar que um elemento *ds* correspondente a um elemento infinitesimal da linha de corrente é dado por:

$$ds = R\,d\theta$$

Mas, voltando ao assunto de interesse, e equação de Euler:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}.\nabla\right)\vec{V} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$$

Cumpre lembrar que o vetor da velocidade, pela própria definição de um Sistema Intrínseco de Coordenadas, é dado por:

$$\vec{V} = V\,\vec{e}_s$$

Assim, a aceleração fica:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}.\nabla\right)\vec{V} = \frac{\partial\left(V\vec{e}_s\right)}{\partial t} + \left(V\,\frac{\partial}{\partial s}\right)V\vec{e}_s = \frac{\partial V}{\partial t}\vec{e}_s + V\,\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial t} + V\,\frac{\partial V}{\partial s}\vec{e}_s + V^2\,\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} \quad \text{(I)}$$

Cabe ver aqui que o versor $\vec{e}_s$ varia ao longo da direção tangente s da linha de corrente devido à mudança de direção do vetor da velocidade, e varia com o tempo em um ponto fixo da linha de corrente se o escoamento for não-permanente. Assim, é preciso descobrir suas derivadas.

Voltando à definição dos versores $\vec{e}_s$ e $\vec{e}_n$, temos que:

$$\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} = \frac{\partial}{R\partial \theta}\left(-\operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y\right) = \frac{-\cos\theta\,\vec{e}_x - \operatorname{sen}\theta\,\vec{e}_y}{R} = -\frac{\vec{e}_n}{R}$$

$$\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial t} = \frac{\partial \vec{e}_s}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\vec{e}_n\,\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

Substituindo essas expressões na expressão (I) da aceleração:

$$\vec{a} = \frac{\partial V}{\partial t}\vec{e}_s + V\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s}\vec{e}_s + V^2\frac{\partial \vec{e}_s}{\partial s} = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s}\right)\vec{e}_s + \left(-V\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{V^2}{R}\right)\vec{e}_n$$

Assim, obtivemos expressões para a aceleração normal e tangencial:

$$a_s = \frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s} \qquad a_n = -V\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{V^2}{R}$$

Lembrando que a equação de Euler é:

$$\vec{a} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}$$

Resulta:

$$\boxed{\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g_s \qquad -V\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{V^2}{R} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} + g_n}$$

Falta a segunda parte do exercício, que é demonstrar que:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g_s \quad \text{(II)}$$

Resulta na equação de Bernoulli.

Para tanto, vamos usar a idéia, explicada em aula, que a aceleração da gravidade deriva de um potencial:

$$\vec{g} = \nabla(-gz)$$

Onde z é uma conta vertical. A componente g_s da aceleração da gravidade será dada por:

$$g_s = \vec{g}.\vec{e}_s = \nabla(-gz).\vec{e}_s = \frac{\partial(-gz)}{\partial s}$$

Fizemos uso, acima, do conceito de derivada direcional.

Voltando agora para a expressão (II) e lembrando que, se o escoamento for permanente:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

Se o escoamento for permanente e incompressível, uma partícula se translada ao longo da linha de corrente com massa específica constante:

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{p}{\rho}\right)$$

E, do cálculo:

$$V\frac{\partial V}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

Com os resultados anteriores, a equação (II):

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V\frac{\partial V}{\partial s} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial s} + g_s$$

Resulta, para escoamento permanente e incompressível:

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz\right) = 0$$

Ou seja,

$$\boxed{\frac{V^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{constante sobre uma linha de corrente}}$$

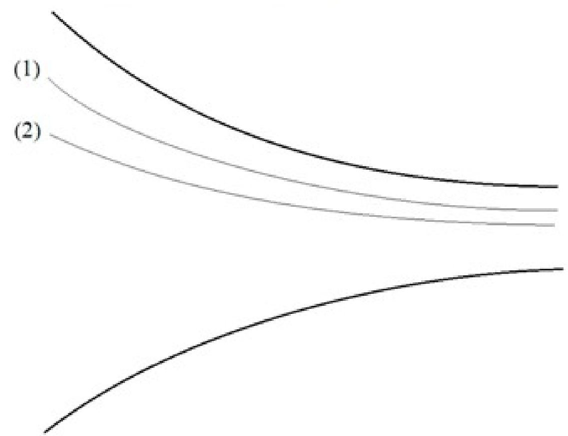
O exercício é muito teórico, mas os resultados servem para explicar uma série de questões importantes do ponto de vista da engenharia. Primeiramente, ignorando a gravidade e considerando escoamento permanente, imaginemos duas linhas de corrente, (1) e (2), submetidas ao mesmo gradiente de pressão $\partial p/\partial s$. Da equação de Euler na direção tangencial, teremos:

$$V_1 \frac{\partial V_1}{\partial s} = V_2 \frac{\partial V_2}{\partial s}$$

Se tivermos uma contração, e a linha de corrente (1) apresentar uma velocidade maior que a linha de corrente (2):

$$V_1 > V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V_1}{\partial s} < \frac{\partial V_2}{\partial s}$$

Assim, a variação de velocidade sobre a linha de corrente (1) será menor que sobre a linha de corrente (2), ou seja, na saída da contração as velocidades tendem a se uniformizar.



Isso ajuda a explicar porque, em túneis de vento, antes da seção de testes temos uma contração. Ela ajuda a termos um perfil de velocidades uniforme na seção de testes.

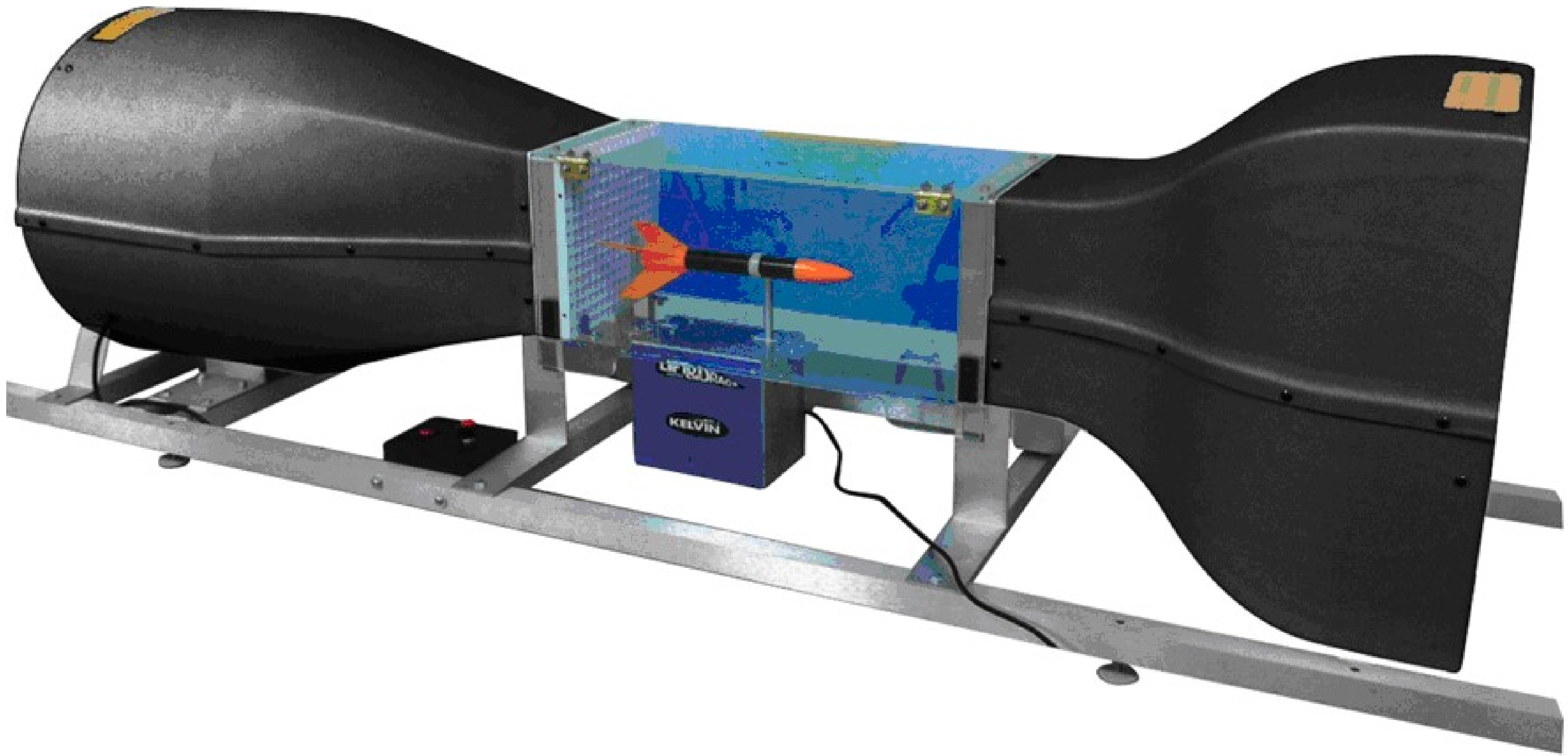
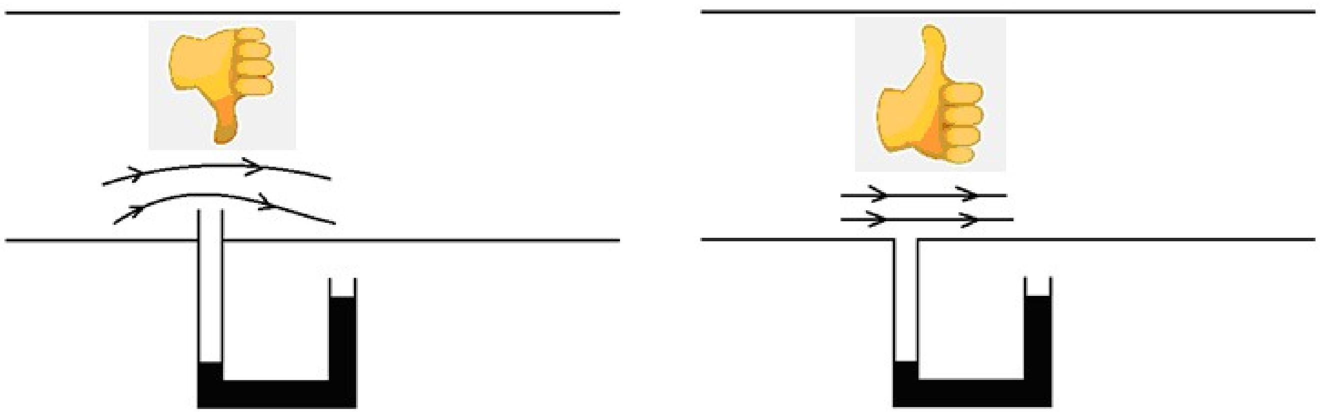


Figura extraída de https://kelvin.com/kelvin-kel-wind-3-wind-tunnel/. Túnel de vento educacional da KELVIN EDUCATIONAL.

Outro aspecto importante está relacionado com o efeito da curvatura das linhas de corrente sobre o perfil de pressões. Novamente, se ignorarmos a gravidade e considerarmos regime permanente, a equação de Euler na direção normal fica:

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \rho \frac{V^2}{R}$$

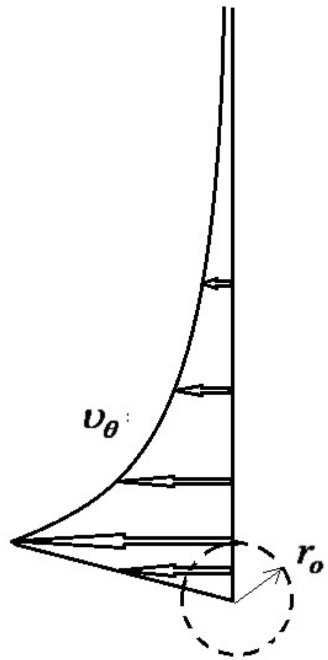
Isso significa que a curvatura das linhas de corrente interfere no gradiente de pressão, aumentando a pressão "para o lado de fora da curva". Assim, medidas de pressão que visam uma obtenção de uma pressão média em uma seção devem ser realizadas em regiões onde as linhas de corrente sejam retilíneas, e um sensor de pressão não pode perturbar as linhas de corrente.



Exercício: O vórtice de Rankine é um modelo usado para representar furacões ou tornados. Ele é dado pelo campo de velocidades:

$$\upsilon_r \cong 0 \qquad \upsilon_z \cong 0 \qquad \upsilon_\theta = \begin{cases} \Omega r \ \text{ para } \ r \le r_o \\ \dfrac{\Omega r_o^{\ 2}}{r} \ \text{ para } \ r \ge r_o \end{cases}$$

Se a pressão ao longe do vórtice é p_∞, obtenha a pressão: (a) para $r = r_o$ e (b) para $r = 0$.



a) A região para $r > r_o$ é uma região de escoamento irrotacional, pois:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{\upsilon} = \left(\underbrace{\frac{\partial \upsilon_z}{r\,\partial \theta}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial \upsilon_\theta}{\partial z}}_{0} \right) \vec{e}_r + \left(\underbrace{\frac{\partial \upsilon_r}{\partial z}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial \upsilon_z}{\partial r}}_{0} \right) \vec{e}_\theta + \left(\underbrace{\frac{\partial \upsilon_\theta}{\partial r}}_{-\frac{\Omega r_o^{\,2}}{r^2}} - \underbrace{\frac{\partial \upsilon_r}{r\,\partial \theta}}_{0} + \underbrace{\frac{\upsilon_\theta}{r}}_{\frac{\Omega r_o^{\,2}}{r^2}} \right) \vec{e}_z = 0$$

Assim, podemos usar a equação de Bernoulli entre um ponto tal que $r \to \infty$ e o ponto $r = r_o$:

$$\rho \frac{\upsilon_\theta^{\,2}(r \to \infty)}{2} + p_\infty = \rho \frac{\upsilon_\theta^{\,2}(r = r_o)}{2} + p(r = r_o)$$

Como a velocidade é inversamente proporcional ao raio, temos que:

$$\upsilon_\theta(r \to \infty) = 0$$

E temos que $\upsilon_\theta(r = r_o) = \Omega\, r_o$. Assim:

$$\boxed{p(r = r_o) = p_\infty - \rho \frac{\Omega^2\, r_o{}^2}{2}}$$

b) A região para $r \le r_o$ é uma região de escoamento rotacional, pois:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{\upsilon} = \left(\underbrace{\frac{\partial \upsilon_z}{r\,\partial \theta}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial \upsilon_\theta}{\partial z}}_{0} \right) \vec{e}_r + \left(\underbrace{\frac{\partial \upsilon_r}{\partial z}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial \upsilon_z}{\partial r}}_{0} \right) \vec{e}_\theta + \left(\underbrace{\frac{\partial \upsilon_\theta}{\partial r}}_{\Omega} - \underbrace{\frac{\partial \upsilon_r}{r\,\partial \theta}}_{0} + \underbrace{\frac{\upsilon_\theta}{r}}_{\Omega} \right) \vec{e}_z = 2\Omega\,\vec{e}_z$$

Assim, cada linha de corrente tem sua constante de Bernoulli própria. Mas podemos usar a Equação de Euler para obter a distribuição de pressões:

$$\vec{a} = -\frac{1}{\rho} \nabla p$$

Resulta:

$$\underbrace{\frac{\partial \upsilon_r}{\partial t}}_{0}+\underbrace{\upsilon_r\frac{\partial \upsilon_r}{\partial r}}_{0}+\upsilon_\theta\underbrace{\frac{\partial \upsilon_r}{r\partial \theta}}_{0}-\frac{\upsilon_\theta{}^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial p}{\partial r}=\rho\frac{\upsilon_\theta{}^2}{r}$$

$$\underbrace{\frac{\partial \upsilon_\theta}{\partial t}}_{0}+\underbrace{\upsilon_r}_{0}\frac{\partial \upsilon_\theta}{\partial r}+\upsilon_\theta\underbrace{\frac{\partial \upsilon_\theta}{r\partial \theta}}_{0}+\underbrace{\frac{\upsilon_\theta\,\upsilon_r}{r}}_{0}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial \theta} \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial p}{\partial \theta}=0$$

Assim:

$$\frac{dp}{dr}=\rho\frac{\upsilon_\theta{}^2}{r} \quad\Rightarrow\quad \frac{dp}{dr}=\rho\,\Omega^2\,r$$

Integrando:

$$p = \rho\,\Omega^2\,\frac{r^2}{2} + C$$

Como para $r = r_o$ temos $p = p_\infty - \rho\,\dfrac{\Omega^2\, r_o^{\,2}}{2}$:

$$p_\infty - \rho\,\frac{\Omega^2\, r_o^{\,2}}{2} = \rho\,\frac{\Omega^2\, r_o^{\,2}}{2} + C \quad \Rightarrow \quad C = p_\infty - \rho\;\Omega^2\, r_o^{\,2}$$

E assim, a pressão na região rotacional fica:

$$\boxed{p = p_\infty + \rho\,\Omega^2\,\frac{r^2}{2} - \rho\,\Omega^2\, r_o^{\,2}} \quad \text{e} \quad \boxed{p(r=0) = p_\infty - \rho\,\Omega^2\, r_o^{\,2}}$$