EQUAÇÕES DE MAXWELL

(i) LEI DE FARADAY: campo magnético variante induz campo elétrico

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

(ii) LEI CIRCUITAL DE AMPÈRE: campo magnético é gerado por corrente ou por campo elétrico variante

$$\boxed{\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}}$$

$\vec{J}$: vetor densidade de corrente [A/m²]

$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$: vetor densidade de corrente de deslocamento [A/m²]

(iii) LEI DE GAUSS PARA CAMPO ELÉTRICO: relação entre cargas elétricas e campo elétrico

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{D} = \rho} \quad \text{ou} \quad \boxed{\oint_S \vec{D}\, dS = \int_V \rho \, dV}$$

→ o fluxo elétrico total atravessando uma superfície S fechada é igual à carga envolvida.

$\vec{D}$: vetor densidade de fluxo elétrico

ρ: densidade volumétrica de cargas

(iv) LEI DE GAUSS PARA CAMPO MAGNÉTICO: indica que não há carga magnética ⇒ fluxo magnético total através de uma superfície é nulo.

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{B} = 0}$$

$\vec{B}$: vetor densidade de fluxo magnético

(v) LEI DA CONTINUIDADE

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow \overset{0}{\nabla \cdot (\nabla \times H)} = \nabla \cdot J + \frac{\partial (\nabla \cdot D)}{\partial t} \Rightarrow \nabla \cdot J = -\frac{\partial (\nabla \cdot D)}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\boxed{\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

a) Para um meio isotrópico, i.e as propriedades da onda independem da direção:

$$\begin{cases} \vec{D} = \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} = \mu \vec{H} \end{cases}$$

b) Quando não há dependência temporal, tem-se:

→ campos eletrostáticos: $\nabla \times \vec{E} = 0$ e $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$

→ campos magnetostáticos: $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ e $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

c) Para uma região sem fontes, $\rho = 0$ e $J = 0$, então:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \nabla \cdot \vec{D} = 0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

EQUAÇÃO DE ONDA

a) CAMPO ELÉTRICO EM MEIO ISOTRÓPICO

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times E = -\mu \frac{\partial H}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times E) = -\mu \frac{\partial (\nabla \times H)}{\partial t} \Rightarrow$$

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(J + \frac{\partial D}{\partial t}\right) \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times E) = -\mu \frac{\partial J}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Como $\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla \cdot (\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$, tem-se:

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot E) - \nabla^2 E = -\mu \frac{\partial J}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Como $\nabla D = \rho \Rightarrow \nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon}$ e $\nabla \cdot J = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \Rightarrow \rho = -\int_V \nabla \cdot J \, dV$, tem-se

$\nabla \cdot E = -\frac{1}{\varepsilon} \int \nabla \cdot J \, dV$, logo:

$$-\frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \left(\int_V \nabla \cdot J \, dV \right) - \nabla^2 E = -\mu \frac{\partial J}{\partial t} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \nabla^2 E = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \cdot \left(\int_V \nabla \cdot J \, dV \right) - \mu \frac{\partial J}{\partial t}}$$

Para uma região sem fontes:

$$\boxed{\nabla^2 E = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}}$$

b) CAMPO MAGNÉTICO EM MEIO ISOTRÓPICO

$$\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times H = J + \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times H) = \nabla \times J + \varepsilon \frac{\partial (\nabla \times E)}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times H) = \nabla \times J + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right) \Rightarrow \nabla \times (\nabla \times H) = \nabla \times J - \varepsilon \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \Rightarrow$$

$$\nabla \times (\nabla \times H) = \nabla \times J - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$$

Novamente, tem-se:

$$\nabla \cdot (\nabla \cdot H) - \nabla^2 H = \nabla \times J - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t}$$

Seja $\nabla \cdot B = 0 \Rightarrow \nabla \cdot (\mu H) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot H = 0$, logo:

$$-\nabla^2 H = \nabla \times J - \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} \Rightarrow \boxed{\varepsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \nabla^2 H = \nabla \times J}$$

Para uma região sem fontes:

$$\boxed{\nabla^2 H = \varepsilon \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}}$$

∇^2: laplaciano (espacial) $\Rightarrow \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

FASORES

Assumindo um regime senoidal, a equação de onda do campo elétrico em meio isotrópico resulta em um conjunto solução simples formado por equações do tipo:

$$E(x,y,z,t) = E(x,y,z) \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

onde ϕ é o ângulo de fase e $\omega = 2\pi f$.

Seja $\cos(\omega t + \phi) = \mathrm{Re}\{e^{j(\omega t + \phi)}\}$, pode-se reescrever o campo como:

$$E(x,y,z,t) = \mathrm{Re}\{E(x,y,z)\, e^{j(\omega t + \phi)}\}$$

ou, em notação fasorial, $\bar{E} = E \angle \phi$.

RELAÇÃO DE DISPERSÃO

Na forma fasorial, $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$, então:

$$\nabla^2 E = \varepsilon\mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \leftrightarrow \nabla^2 E = -\omega^2 \mu\varepsilon E \Rightarrow \boxed{(\nabla^2 + \omega^2\mu\varepsilon)\vec{E}(x,y,z) = 0}$$

onde

$$\vec{E}(x,y,z) = E_x(x,y,z)\,\hat{x} + E_y(x,y,z)\,\hat{y} + E_z(x,y,z)\,\hat{z}$$

Assim, tem-se:

$$\nabla^2 E_x \hat{x} + \nabla^2 E_y \hat{y} + \nabla^2 E_z \hat{z} + \omega^2\mu\varepsilon E_x \hat{x} + \omega^2\mu\varepsilon E_y \hat{y} + \omega^2\mu\varepsilon E_z \hat{z} = 0 \Rightarrow$$

$$(\nabla^2 + \omega^2\mu\varepsilon) E_x \hat{x} + (\nabla^2 + \omega^2\mu\varepsilon) E_y \hat{y} + (\nabla^2 + \omega^2\mu\varepsilon) E_z \hat{z} = 0$$

De forma que:

$$\begin{cases} (\nabla^2 + \omega^2\mu\varepsilon) E_x(x,y,z) = 0 \\ (\nabla^2 + \omega^2\mu\varepsilon) E_y(x,y,z) = 0 \\ (\nabla^2 + \omega^2\mu\varepsilon) E_z(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

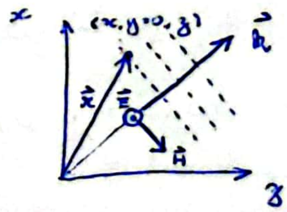
Analisando apenas uma componente, tem-se a equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + \omega^2\mu\varepsilon E_x = 0$$

que confere como solução:

$$\boxed{E_x(x,y,z) = E_{x_0}\, e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)}}$$

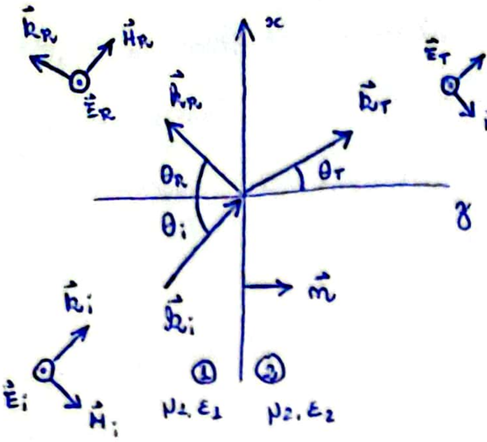
Nesse sentido, deve-se encontrar que as constantes respeitam a relação de dispersão:



$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \omega^2\mu\varepsilon \equiv k^2 \quad \text{(número de onda)}$$

Pode-se definir o vetor propagação ou vetor de onda $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$ que será normal às frentes de onda e indica a direção de propagação da onda.

REFLEXÃO E TRANSMISSÃO (POLARIZAÇÃO TE)



Considerando dois meios isotrópicos 1 (μ_1, ε_1) e 2 (μ_2, ε_2) com uma interface $(z = 0)$, onde $\hat{m}$ é o versor normal à interface, seja a situação especial com campo elétrico incidente $\vec{E}_i = E_0 e^{-j(k_x x + k_z z)} \hat{y}$ em que os vetores propagação, situados no plano xz, tem-se:

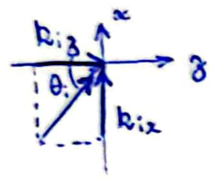
(i) incidente: $\vec{k}_i = k_{ix}\hat{x} + k_{iz}\hat{z}$

(ii) refletido: $\vec{k}_R = k_{Rx}\hat{x} - k_{Rz}\hat{z}$

(iii) transmitido: $\vec{k}_T = k_{Tx}\hat{x} + k_{Tz}\hat{z}$

Assim,

(i)



$$\vec{k}_i = k_{ix}\hat{x} + k_{iz}\hat{z} = k_1 \operatorname{sen}(\theta_i)\hat{x} + k_1 \cos(\theta_i)\hat{z}$$

(ii) $\vec{k}_R = k_{Rx}\hat{x} - k_{Rz}\hat{z} = k_1 \operatorname{sen}(\theta_R)\hat{x} - k_1 \cos(\theta_R)\hat{z}$

(iii) $\vec{k}_T = k_{Tx}\hat{x} + k_{Tz}\hat{z} = k_2 \operatorname{sen}(\theta_T)\hat{x} + k_2 \cos(\theta_T)\hat{z}$

OBS.: A partir da Lei de Faraday, pode-se encontrar a componente do campo magnético partindo do campo elétrico:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \leftrightarrow \nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H} \Rightarrow \vec{H} = -\frac{\nabla \times \vec{E}}{j\omega\mu}$$

Assim, o campo magnético incidente seria $\vec{H}_i = (-k_{iz}\hat{x} + k_{ix}\hat{z}) \dfrac{E_0}{\omega\mu_1} e^{-j(k_{ix}\hat{x} + k_{iz}\hat{z})}$

Dessa forma, seja R o coeficiente de reflexão e T o coeficiente de transmissão:

(a) campos da onda refletida

$$\vec{E}_R = R E_0 e^{-j(k_{Rx} x - k_{Rz} z)} \hat{y}$$

$$\vec{H}_R = (k_{Rz}\hat{x} + k_{Rx}\hat{z}) \frac{R E_0}{\omega\mu_1} e^{-j(k_{Rx} x - k_{Rz} z)}$$

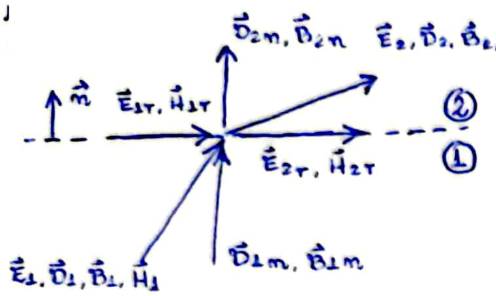
(b) campos da onda transmitida

$$\vec{E}_T = T E_0 e^{-j(k_{Tx} x + k_{Tz} z)} \hat{y}$$

$$\vec{H}_T = (-k_{Tz}\hat{x} + k_{Tx}\hat{z}) \frac{T E_0}{\omega\mu_2} e^{-j(k_{Tx} x + k_{Tz} z)}$$

A partir deste momento, é importante conhecer as relações determinadas pelas condições de contorno para inferir, então, as relações entre os coeficientes de reflexão e transmissão.

As condições de contorno dizem respeito ao comportamento das componentes normais e tangenciais dos campos elétrico e magnético na fronteira/interface entre os meios (1 e 2).



Utilizando as leis de Gauss, é possível encontrar que para as componentes normais:

$$\begin{cases} \hat{n}\cdot(D_2 - D_1) = \rho_s \\ \hat{n}\cdot(B_2 - B_1) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} D_{2n} - D_{1n} = \rho_s \\ B_{2n} - B_{1n} = 0 \end{cases}$$

Utilizando as demais Eqs. de Maxwell, encontra-se para as componentes tangenciais:

$$\begin{cases} \hat{n}\times(H_2 - H_1) = K_s \\ \hat{n}\times(E_2 - E_1) = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} H_{2T} - H_{1T} = K_s \\ E_{2T} - E_{1T} = 0 \end{cases}$$

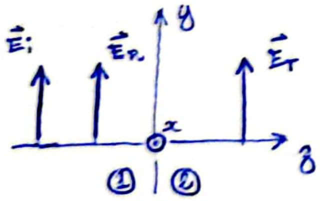
K_s: corrente superficial I_s/ℓ [A/m]

OBS: A corrente superficial só existe na superfície do condutor perfeito. Em materiais com condutividade finita, a corrente flui por uma lâmina próxima da superfície $\Rightarrow K_s = 0$

Assim, seja $K_s = 0$ e $\rho_s = 0$, de forma que:

$$\begin{cases} E_{2T} = E_{1T} \\ H_{2T} = H_{1T} \end{cases}$$

As condições de contorno para o campo elétrico vão mostrar que as componentes tangenciais, seja $\vec{E}_T$ e a soma vetorial $\vec{E}_i + \vec{E}_R$, devem se igualar, logo, na interface ($z=0$), tem-se:



$$E_i(z=0) + E_R(z=0) = E_T(z=0) \Rightarrow$$

$$\underbrace{e^{-jk_{ix}x} + Re^{-jk_{Rx}x}}_{\text{MEIO ①}} = \underbrace{Te^{-jk_{Tx}x}}_{\text{MEIO ②}} \qquad (\mathrm{I})$$

Para o campo magnético, pode-se observar que as condições de contorno, sendo os campos $\vec{H}_i$, $\vec{H}_R$ e $\vec{H}_T$ tangenciais à interface, vão levar, na componente x, a:

$$H_{ix}(z=0) + H_{Rx}(z=0) = H_{Tx}(z=0) \Rightarrow \underbrace{-\frac{k_{iz}}{\mu_1}e^{-jk_{ix}x} + R\frac{k_{Rz}}{\mu_1}e^{-jk_{Rx}x}}_{\text{MEIO ①}} = \underbrace{-T\frac{k_{Tz}}{\mu_2}e^{-jk_{Tx}x}}_{\text{MEIO ②}} \qquad (\mathrm{II})$$

Determinadas as relações que advêm das condições de contorno (I e II), percebe-se que, para que a igualdade (I) seja verdade para todo x, é necessário que:

$$k_{ix} = k_{Rx} = k_{Tx} \qquad \text{(III)}$$

Essa condição é denominada casamento de fase e deve valer em qualquer posição da interface. Dessa relação, é possível encontrar que $\theta_R = \theta_i$, pois $k_{ix} = k_{Rx} \Rightarrow k_1 \operatorname{sen}(\theta_i) = k_1 \operatorname{sen}(\theta_R)$.

A partir da relação de dispersão, sabe-se que:

$$\begin{cases} k_{ix}^2 + k_{iz}^2 = k_1^2 = \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 \\ k_{Rx}^2 + k_{Rz}^2 = k_1^2 = \omega^2 \mu_1 \varepsilon_1 \\ k_{Tx}^2 + k_{Tz}^2 = k_2^2 = \omega^2 \mu_2 \varepsilon_2 \end{cases} \qquad (*)$$

Porém, como $k_{ix} = k_{Rx} = k_{Tx}$, então pode-se encontrar que $k_{iz} = k_{Rz}$ (IV)

Aplicando (III) em (I), encontra-se que:

$$\boxed{1 + R = T}$$

Aplicando (III) em (II), tem-se:

$$-\frac{k_{iz}}{\mu_1} + R\frac{k_{Rz}}{\mu_1} = -T\frac{k_{Tz}}{\mu_2}$$

Como $k_{iz} = k_{Rz} = k_1 \cos(\theta_i)$ e $k_{Tz} = k_2 \cos(\theta_T)$, então

$$-\frac{k_1 \cos(\theta_i)}{\mu_1} + R\frac{k_1 \cos(\theta_i)}{\mu_1} = -T\frac{k_2 \cos(\theta_T)}{\mu_2} \Rightarrow$$

$$-\frac{\omega\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}\cos(\theta_i)}{\mu_1} + R\frac{\omega\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}\cos(\theta_i)}{\mu_1} = -T\frac{\omega\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}\cos(\theta_T)}{\mu_2} \Rightarrow$$

$$-\omega\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos(\theta_i) + R\omega\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\cos(\theta_i) = -T\omega\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\cos(\theta_T) \Leftrightarrow$$

Seja $\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_{R1}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{R1}}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu_{R1}}{\varepsilon_{R1}}} \Rightarrow \eta_1 = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_{R1}}{\varepsilon_{R1}}}\ [\Omega]$

$$\Rightarrow -\frac{\cos(\theta_i)}{\eta_1} + \frac{R\cos(\theta_i)}{\eta_1} = -T\frac{\cos(\theta_T)}{\eta_2}$$

Seja $1 + R = T$, deve-se encontrar da equação anterior que:

$$\boxed{R = \frac{\eta_2 \cos(\theta_i) - \eta_1 \cos(\theta_T)}{\eta_2 \cos(\theta_i) + \eta_1 \cos(\theta_T)}}$$

$$\boxed{T = \frac{2\eta_2 \cos(\theta_i)}{\eta_2 \cos(\theta_i) + \eta_1 \cos(\theta_T)}}$$

Esse procedimento é válido para uma onda incidente polarizada TE (Transverse Electric), como indicado no título dessa seção. A polarização TE significa que o campo elétrico é perpendicular ao plano de incidência (interface), de forma que o campo magnético está contido no plano de incidência. Caso haja polarização TM (Transverse Magnetic), pode-se usar as mesmas ideias para encontrar a relação entre R e T. Na polarização TM, o campo magnético e elétrico são, respectivamente, perpendicular e contido no plano de incidência.

Quanto à reflexão e transmissão, o ângulo de Brewster é o ângulo de incidência no qual uma onda polarizada é perfeitamente transmitida pela interface (ou seja, $R = 0$). Do contrário, quando uma onda não polarizada incide com o ângulo de Brewster, a onda refletida é perfeitamente polarizada e a onda transmitida é ligeiramente polarizada.

Para a polarização TM, tem-se os coeficientes:

$$\boxed{R^{TM} = \frac{\eta_1 \cos(\theta_i) - \eta_2 \cos(\theta_T)}{\eta_1 \cos(\theta_i) + \eta_2 \cos(\theta_T)}} \qquad \boxed{T^{TM} = \frac{2\eta_2 \cos(\theta_i)}{\eta_1 \cos(\theta_i) + \eta_2 \cos(\theta_T)}}$$

Dessa forma, se $R^{TM} = 0$, então:

$$\eta_1 \cos(\theta_i) = \eta_2 \cos(\theta_T) \Rightarrow \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cdot \cos(\theta_i) = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cdot \cos(\theta_T)$$

Como $\cos(\theta_i) = k_{iz}/k_1 = \frac{k_{iz}}{\omega\sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}}$ e $\cos(\theta_T) = k_{Tz}/k_2 = k_{Tz}/\omega\sqrt{\mu_2 \varepsilon_2}$, tem-se.

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cdot \frac{k_{iz}}{\omega\sqrt{\mu_1\varepsilon_1}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cdot \frac{k_{Tz}}{\omega\sqrt{\mu_2\varepsilon_2}} \Rightarrow \varepsilon_2 k_{iz} = \varepsilon_1 k_{Tz} \quad (V)$$

Das relações de dispersão, apresentadas em (*), tem-se:

$$\varepsilon_2^2 \cdot k_{iz}^2 = \varepsilon_1^2 \cdot k_{Tz}^2 \Rightarrow \varepsilon_2^2 \cdot (k_1^2 - k_{ix}^2) = \varepsilon_1^2 \cdot (k_2^2 - k_{Tx}^2)$$

Da relação (III), tem-se:

$$\varepsilon_2^2 \cdot (k_1^2 - k_{ix}^2) = \varepsilon_1^2 \cdot (k_2^2 - k_{ix}^2) \Rightarrow (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) k_{ix}^2 = \varepsilon_1^2 k_2^2 - \varepsilon_2^2 \cdot k_1^2 \Rightarrow$$

$$k_{ix}^2 = \frac{\varepsilon_1^2 k_2^2 - \varepsilon_2^2 k_1^2}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2} \Rightarrow k_{ix}^2 = \frac{\varepsilon_1^2 \cdot \omega^2 \cdot \mu_2 \cdot \varepsilon_2 - \varepsilon_2^2 \cdot \omega^2 \cdot \mu_1 \varepsilon_1}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}$$

Como na maioria dos materiais nas frequências ópticas observa-se $\varepsilon_1 \neq \varepsilon_2$, mas $\mu_1 \simeq \mu_2$, assume-se $\mu_1 = \mu_2$, de forma que:

$$k_{ix}^2 = \omega^2 \cdot \mu_1 \frac{\varepsilon_1^2 \cdot \varepsilon_2 - \varepsilon_2^2 \cdot \varepsilon_1}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2} = \omega^2 \mu_1 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \Rightarrow$$

$$k_{ix}^2 = \omega^2 \mu_1 \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \Rightarrow k_{ix} = \omega\sqrt{\mu_1} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} = k_1 \operatorname{sen} \theta_i = k_2 \operatorname{sen} \theta_T$$

Assim, da relação (V),

$$\operatorname{sen} \theta_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} \theta_T = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}}$$

ou, então,

$$\operatorname{sen}^2 \theta_i + \operatorname{sen}^2 \theta_T = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \theta_T + (1 - \cos^2 \theta_i) = 1 \Rightarrow \operatorname{sen} \theta_T = \cos \theta_i \Rightarrow$$

$$\cos(\pi/2 - \theta_T) = \cos \theta_i \Rightarrow \boxed{\theta_i + \theta_T = \pi/2}$$

Dessa forma, retornando a condição $R^{TM} = 0$,

$$n_1 \cos(\theta_i) = n_2 \cos(\theta_T) \Rightarrow n_1 \cos(\theta_i) = n_2 \cos(\pi/2 - \theta_i) \Rightarrow n_1 \cos(\theta_i) = n_2 \operatorname{sen}(\theta_i) \Rightarrow$$

$$\tan(\theta_i) = n_1/n_2 \Rightarrow \theta_B^{TM} = \theta_i = \operatorname{arctan}(n_1/n_2) \Rightarrow \boxed{\theta_B^{TM} = \operatorname{arctan}\left(\sqrt{\frac{\mu_1 \varepsilon_2}{\mu_2 \varepsilon_1}}\right)}$$

Também é possível encontrar o ângulo de Brewster utilizando a lei de Snell (III):

$$k_1 \operatorname{sen}\theta_i = k_2 \operatorname{sen}\theta_T \Rightarrow \sqrt{\mu_1\varepsilon_1}\operatorname{sen}\theta_i = \sqrt{\mu_2\varepsilon_2}\operatorname{sen}\theta_T \Rightarrow$$

$$\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}\operatorname{sen}^2\theta_i = \operatorname{sen}^2\theta_T = 1-\cos^2\theta_T \Rightarrow \cos^2\theta_T = 1-\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}\operatorname{sen}^2\theta_i$$

Retornando a condição $R^{TM}=0$:

$$n_1\cos\theta_i = n_2\cos\theta_T \Rightarrow \frac{\mu_1}{\varepsilon_1}\cos^2\theta_i = \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}\cos^2\theta_T \Rightarrow$$

$$\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}(1-\operatorname{sen}^2\theta_i) = \frac{\mu_2}{\varepsilon_2}\left(1-\frac{\mu_1\varepsilon_1}{\mu_2\varepsilon_2}\operatorname{sen}^2\theta_i\right) \Rightarrow \operatorname{sen}^2\theta_i = \frac{1-\frac{\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1\varepsilon_2}}{1-(\varepsilon_1/\varepsilon_2)^2} \Rightarrow$$

$$\theta_B^{TM} = \theta_i \Rightarrow \boxed{\theta_B^{TM} = \operatorname{arcsen}\left(\sqrt{\frac{1-\frac{\mu_2\varepsilon_1}{\mu_1\varepsilon_2}}{1-(\varepsilon_1/\varepsilon_2)^2}}\right)} \quad (\mu_1=\mu_2)$$

Para a polarização TE (perpendicular), deve-se encontrar que:

$$\boxed{\operatorname{sen}^2\theta_B^{TE} = \frac{1-\mu_1\varepsilon_2/\mu_2\varepsilon_1}{1-(\mu_1/\mu_2)^2}}$$

Mas como $\mu_1 \approx \mu_2$ $(\mu_1=\mu_2)$, o efeito do ângulo de Brewster não tem nenhum aplicação, pois o denominador resultaria em zero (não há transmissão total para interfaces e ondas no modo TE).

TEOREMA DE POYNTING

Conhecendo a identidade vetorial: $\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot(\nabla\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\nabla\times\vec{H})$, utiliza-se as leis de Faraday e Ampère para encontrar:

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = \vec{H}\cdot\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) - \vec{E}\cdot\left(\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\right)$$

Seja um meio isotrópico, linear e homogêneo:

$$\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = -\mu\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \varepsilon\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} - \vec{E}\cdot\vec{J}$$

Sabendo que

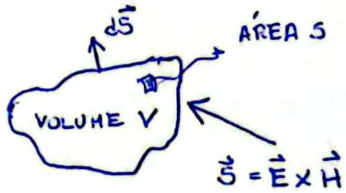
$$\frac{\partial(\vec{A}\cdot\vec{A})}{\partial t} = \vec{A}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + \vec{A}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial[|\vec{A}||\vec{A}|\cos 0]}{\partial t} = 2\vec{A}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial|\vec{A}|^2}{\partial t} = 2\vec{A}\cdot\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$$

então:

$$\boxed{-\nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = \frac{\mu}{2}\frac{\partial|\vec{H}|^2}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial|\vec{E}|^2}{\partial t} + \vec{E}\cdot\vec{J}}$$

O teorema da divergência nos diz que $\int_V \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H})\,dV = \oint_S (\vec{E}\times\vec{H})\cdot d\vec{S}$, então, integrando em um volume arbitrário V envolto por uma superfície S, encontra-se

$$\boxed{-\oint_S \nabla\cdot(\vec{E}\times\vec{H}) = \int_V\left(\frac{\mu}{2}\frac{\partial|\vec{H}|^2}{\partial t} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial|\vec{E}|^2}{\partial t} + \vec{E}\cdot\vec{J}\right)dV}$$



(POTÊNCIA ENTRANDO NO VOLUME V) = (TAXA DE ACRÉSCIMO DA ENERGIA MAGNÉTICA ARMAZENADA EM V) + (TAXA DE ACRÉSCIMO DA ENERGIA ELÉTRICA ARMAZENADA EM V) + (POTÊNCIA DISSIPADA NO VOLUME V)

Pode-se então definir o vetor de Poynting:

$$\boxed{\vec{S}(x,y,z,t) = \vec{E}(x,y,z,t)\times\vec{H}(x,y,z,t)\ \ [W/m^2]}$$

representando a densidade direcional do fluxo de energia de um campo eletromagnético. Nesse contexto o vetor de Poynting complexo será dado por:

$$\boxed{\vec{S}(x,y,z) = \vec{E}(x,y,z)\times\vec{H}^*(x,y,z)\ \ [W/m^2]}$$

$*$: complexo conjugado

E o valor médio do vetor de Poynting:

$$\boxed{\langle\vec{S}(x,y,z,t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \vec{E}(x,y,z,t)\times\vec{H}(x,y,z,t)\,dt = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\vec{E}(x,y,z)\times\vec{H}^*(x,y,z)\}}$$