

Aula 8: Aplicações de Urysohn/Tietze

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1º Semestre de 2023 - Curso de Topologia

lembrando ...

Definição 1

Dizemos que um espaço topológico (X, τ) é T_1 se, e somente se, para quaisquer $x, y \in X$ distintos, existir A aberto tal que $x \in A$ e $y \notin A$.

Proposição 2

(X, τ) é T_1 se, e somente se, para todo $x \in X$, $\{x\}$ é fechado.

Definição 3

Dizemos que (X, τ) é T_4 se, para quaisquer $F, G \subset X$ fechados disjuntos, existirem A, B abertos disjuntos tais que $F \subset A, G \subset B$. Se, além disso, (X, τ) é T_1 , dizemos que (X, τ) é espaço normal.

Lembrar: [Aula 4, Exercício 3](#). Se (X, τ) é T_4 e F é um fechado contido num aberto V , então existe um aberto W tal que $F \subset W \subset \bar{W} \subset V$ (note que isto é, na verdade, equivalente a ser T_4).

Vimos na aula passada ...

Teorema 4 (Lema de Urysohn)

Seja (X, τ) espaço topológico. Então (X, τ) é T_4 se, e somente se, para todo $F, G \subset X$ fechados disjuntos, existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ continua tal que $f(F) = \{0\}$ e $f(G) = \{1\}$.

Teorema 5 (de Tietze)

Sejam (X, τ) espaço T_4 , $F \subset X$ fechado e $f : F \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ extensão contínua de f .

Com Urysohn e Tietze, vamos discutir quando certos espaços são normais (+ simples).

Definição 6

Sejam (X, d) espaço métrico e $A, B \subset X$ conjuntos não vazios. Definimos

$d(A, B) = \inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\}$. No caso $A = \{a\}$, denotamos $d(A, B) = d(a, B)$ (analogamente para $B = \{b\}$).

Exemplo 7

Sejam (X, d) espaço métrico e $A \subset X$ um conjunto não vazio. Então, a função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(x) = d(x, A)$ é contínua.

Demonstração. Seja $a \in A$ e sejam $x, y \in X$. Temos que $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$. Logo $d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A)$. Assim

$$d(x, A) - d(y, A) \leq d(x, y)$$

Analogamente, temos

$$d(y, A) - d(x, A) \leq d(y, x)$$

Portanto, $|f(x) - f(y)| = |d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X$

Com isso, temos que, dado $\varepsilon > 0$, para $x, y \in X$, temos que $d(x, y) < \varepsilon$ implica que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. O que mostra que tal função é **uniformemente contínua** e, portanto, contínua.

Corolário 8

Seja (X, d) um espaço métrico. Então, (X, d) é normal.

Demonstração. Note que T_1 é imediato (já feito). Sejam $F, G \subset X$ fechados disjuntos.

Considere a função $f : X \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(x) = \frac{d(x, G)}{d(x, F) + d(x, G)}.$$

Note que f é como no **Lema de Urysohn** e portanto temos o resultado.

Considere $X = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}, y \geq 0\}$ com a topologia de forma que:

- (i) Se (x, y) é tal que $y > 0$, então uma vizinhança básica de (x, y) é da forma de uma bola aberta centrada em (x, y) que não intercepta o eixo x , isto é $B_\varepsilon((x, y))$ com $0 < \varepsilon < y$;
- (ii) Para os pontos da forma $(x, 0)$, uma vizinhança de tal ponto é da forma de uma bola aberta contida em $\{(a, b) : b > 0\}$ e que tangencie o eixo x no ponto $(x, 0)$ (inclua o ponto em tal vizinhança). Ou seja, $B_y((x, y)) \cup \{(x, 0)\}$ onde $B_r((x, y))$ é a bola com a métrica usual do $\mathbb{R}^2$.

Exemplo 9

Considere (X, τ) como o plano de Niemytski. Vamos mostrar que tal espaço não é normal.

Faremos isso de duas maneiras (ambas usam um argumento de cardinalidade).

Por ser T_1 , afirmar que X não é normal equivale a afirmar que X não é T_4 .

Suponha, por absurdo, que X seja T_4 .

Note primeiramente que $R = \mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\}$ é fechado em X e, como R é discreto, qualquer subconjunto $F \subset R$ é fechado em R e, portanto, também é fechado em X .

Note que F e $R \setminus F$ são disjuntos e fechados em X .

Vamos agora terminar de duas maneiras diferentes:

Solução 1: Aplicando diretamente o definição de T_4 , para cada $F \subset R$, existem abertos (em X) $A(F)$ e $B(F)$ disjuntos tais que $F \subset A(F)$ e $R \setminus F \subset B(F)$.

Vamos mostrar que dados $F \neq G$ subconjuntos de R , então $A(F) \neq A(G)$.

Sejam $F, G \subset R$ com $F \neq G$.

Sem perda de generalidade, suponha $F \setminus G \neq \emptyset$.

Como $F \setminus G = F \cap (R \setminus G)$, segue que $((R \setminus G) \cap F) \subset (B(G) \cap A(F)) \neq \emptyset$, mas como $A(G) \cap B(G) = \emptyset$, temos necessariamente $A(F) \neq A(G)$.

Seja D denso enumerável em X . Defina $A'(F) = A(F) \cap D$ e $B'(F) = B(F) \cap D$. Por argumentação análoga à anterior, vemos que se $F \neq G$, então $A'(F) \neq A'(G)$.

Assim, obtemos $\varphi : \mathcal{P}(R) \rightarrow \mathcal{P}(D)$ dada por $\varphi(F) = A'(F)$, uma função injetora, o que é absurdo, uma vez que $|\mathcal{P}(R)| = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| > |\mathcal{P}(D)| = |\mathcal{P}(N)| = |\mathbb{R}|$.

Solução 2: Aplicando o **Teorema de Tietze**, temos que, para cada $F \subset R$, existe $f_F : X \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f_F(F) = \{0\}$ e $f_F(R \setminus F) = \{1\}$.

Note que, se $F \neq G$, então $f_F \neq f_G$.

Logo, temos uma quantidade maior ou igual que $|\mathcal{P}(\mathbb{R})|$ de funções contínuas saindo de X e chegando em $\mathbb{R}$.

Por outro lado, seja $D \subset X$ denso enumerável (**vimos no exercício**).

Então existem $|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = |\mathbb{R}|$ funções (contínuas ou não) saindo de D e chegando em $\mathbb{R}$.

Logo, pela Proposição 2 - Aula 6, existem, no máximo $|\mathbb{R}|$ funções contínuas saindo de X e chegando em $\mathbb{R}$.

Como $|\mathcal{P}(\mathbb{R})| > |\mathbb{R}|$, temos uma contradição.

1. Seja (X, d) espaço métrico. Sejam $F \subset X$ fechado. Mostre que, dado $x \in X$, $d(x, F) = 0$ se, e somente se, $x \in F$.
2. Prove o seguinte caso particular do Lema de Jones: Seja (X, τ) espaço topológico separável. Se existe $D \subset X$ discreto fechado tal que $|D| = \mathfrak{c}$ (cardinalidade do contínuo), então (X, τ) não é T_4 .
3. Este é um roteiro para mostrar que todo espaço regular enumerável X é zero-dimensional.
 - (a) Primeiramente, lembre que todo enumerável regular é normal.
 - (b) Dados $x \in X$ e V aberto tal que $x \in V$, note que existe $f : X \rightarrow [0, 1]$ contínua tal que $f(x) = 0$ e $f(X \setminus V) = \{1\}$.
 - (c) Como $f(X)$ é enumerável, existe $a \in [0, 1]$ tal que $a \notin f(X)$. Note que $f^{-1}([0, a]) = f^{-1}([0, a))$.
 - (d) Conclua que existe um aberto fechado W tal que $x \in W \subset V$. Note que isso é suficiente para o que queremos.