SME 0300 – Cálculo Numérico

17 de abril de 2023

Exercícios de estudos para prova 1 (não vale nota, não é para entrega)

Obs: Use a calculadora e os códigos das atividades para verificar os resultados. Para os métodos iterativos, faça algumas iterações na mão, e termine o exercício no computador.

1. Sabe-se que o computador possui limitação na representação dos números e essa limitação depende da precisão utilizada. Utilizando as normas IEEE 754 e considerando a precisão simples responda:
   (a) quantos bits são necessários para representar um número?
   (b) qual o maior número real representado?
   (c) qual o menor número inteiro maior que zero representado?
   (d) qual seria o sistema de ponto flutuante $\mathbb{F}(\beta, t, L, U)$ para essa precisão?
2. Dado o sistema $\mathbb{F}(2, 4, -30, 31)$ responda os itens (a), (b) e (c) da questão 1.
3. Considere matrizes quadradas $A_{n\times n}$.
   (a) Como se calcula o determinante de matrizes triangulares inferiores ou triangulares superiores?
   (b) Tendo a decomposição LU de uma matriz A e conhecendo as propriedades dos determinantes, como calcularia o determinante de A?
   (c) O que acontece no caso anterior se o que temos é a decomposição LU de PA (PA = LU)?
4. Defina com suas palavras o que é uma operação elementar matricial e quais são elas.
5. Seja o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 8 \end{cases}$$

   (a) Escreva o sistema na forma $A\vec{x} = \vec{b}$.
   (b) Resolva o sistema utilizando o método de Gauss sem pivoteamento.
   (c) Qual a decomposição LU de A?
   (d) Qual o determinante de A? calcule utilizando a decomposição LU.

(e) Calcule a decomposição LU com pivoteamento parcial ($PA = LU$).

(f) O determinante de PA é igual ao determinante de A? Porque?

(g) Calcule a inversa de A usando a decomposição PA=LU

6. O que é um método iterativo e como ele chega ao fim?

7. Dentre os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel qual converge mais rápido, em geral? Porque?

8. Dentre os métodos de Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel qual é mais eficiente quando paralelizado? Porque?

9. Usando a eliminação de Gauss, verificar que o sistema

$$x_1 + 4x_2 + \alpha x_3 = 6 \tag{1}$$
$$2x_1 - x_2 + 2\alpha x_3 = 3 \tag{2}$$
$$\alpha x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \tag{3}$$

(a) possui uma única solução quando $\alpha = 0$;

(b) infinitas soluções quando $\alpha = 1$;

(c) não tem solução quando $\alpha = -1$.

10. Se uma matriz A é triangular superior, como fica a sua decomposição LU? Ilustre com um exemplo para $A_{3\times 3}$.

11. Se uma matriz A é triangular inferior, com elementos da diagonal principal iguais a 1, como fica a sua decomposição LU? E quando A é triangular inferior com diagonal principal diferente de 1? Ilustre com um exemplo para $A_{3\times 3}$.

12. Mostre que a equação $f(x) = 4x - e^x = 0$ possui uma raiz no intervalo $(0, 1)$ e outra no intervalo $(2, 3)$.

13. Aplique o método da bisseção para resolver:

(a) $\exp(x) - x - 3x = 0$

(b) $x^3 + \cos(x) = 0$

demonstrando os passos graficamente.

14. Usando o método de Newton, determine o valor de π com 3 algarismos significativos corretos. Use como valor inicial $x^{(0)} = 3$.

15. Determinar, pelo método das secantes, uma raiz de cada uma das equações:

(a) $x - 2.7 \ln x = 0$

(b) $\log x - \cos x = 0$

(c) $e^{-x} - \log x = 0$

16. Responda com verdadeiro ou falso:

    (a) Se premultiplicar (ou seja, multiplicar a esquerda) uma matriz A por uma matriz de permutação P, então o resultado será uma matriz com as mesmas linhas que A, mas numa ordem diferente.

    (b) Uma matriz obtida trocando a ordem apenas de duas linhas da matriz identidade, é uma matriz de permutação.

    (c) Se $A = LU$ (decomposição LU), então $\det(A) = \det(L)$ sempre.

    (d) Se $PA = LU$ (decomposição LU), então $\det(A) = \det(U)$ sempre.

    (e) O pivotamento ajuda na precisão reduzindo o erro de arredondamento.

    (f) Toda matriz não-singular admite ser fatorada como $A = LU$.

    (g) Toda matriz não-singular admite ser fatorada como $PA = LU$.