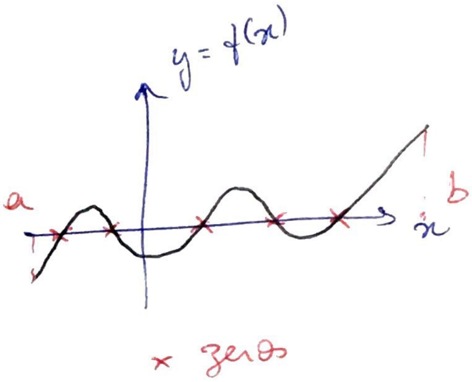
(4) Solução de equações não-lineares (zeros de funções)

{ Quarteroni: Cap. 2
{ Franco: Cap. 3

$$f(x) = c \quad \rightarrow \quad g(x) = f(x) - c = 0$$

{ $f(x) \rightarrow$ função não-linear da variável x
{ $f(x) = 0 \rightarrow$ eq. não-linear cujá incógnita x é o zero da função $f(x)$

ex) $f(x)$ { polinômio de grau > 1
{ funções trigonométricas
{ exp. ou log.



→ Métodos iterativos:

- se f é contínua em $[a, b]$ e $f(a).f(b) < 0$, então existe pelo menos 1 zero em $[a, b]$

- métodos para "cercar" esse valor a partir de um chute inicial

* método da bissecção (divide o intervalo no meio)

$$I^{(0)} = [a^{(0)}, b^{(0)}], \quad x^{(0)} = \frac{a^{(0)} + b^{(0)}}{2}$$

K = 0, while

{ se $f(a^{\overset{(K)}{(0)}}) f(x^{\overset{(K)}{(0)}}) < 0 \rightarrow b^{\overset{(K+1)}{(1)}} = x^{\overset{(K)}{(0)}}, \quad a^{\overset{(K+1)}{(1)}} = a^{\overset{(K)}{(0)}}$
{ se $f(x^{\overset{(K)}{(0)}}) f(b^{\overset{(K)}{(0)}}) < 0 \rightarrow a^{\overset{(K+1)}{(1)}} = x^{\overset{(K)}{(0)}}, \quad b^{\overset{(K+1)}{(1)}} = b^{\overset{(K)}{(0)}}$

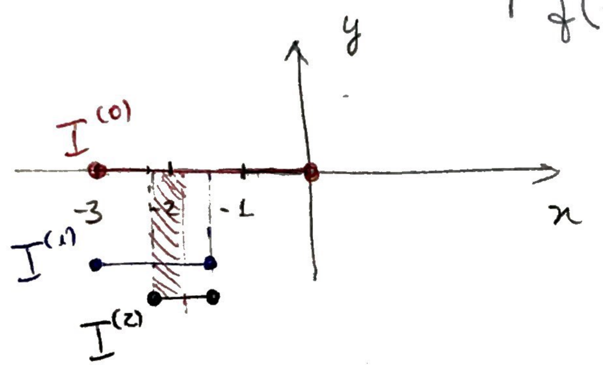
$$I^{(K+1)} = [a^{(K+1)}, b^{(K+1)}]; \quad x^{(K+1)} = \frac{a^{(K+1)} + b^{(K+1)}}{2}$$

ex) $f(x) = x^3 - 2x + 5$

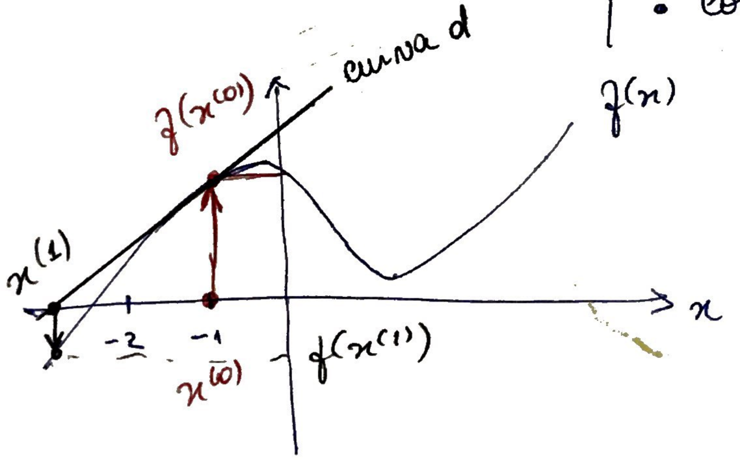
$I^{(0)} = [-3, 0]$ $\begin{cases} f(-3) = -16 \\ f(0) = 5 \\ f(-\frac{3}{2}) = 4,625 \end{cases}$

$I^{(1)} = \left[-3, -\frac{3}{2}\right]$ $\begin{cases} f(-3) = -16 \\ f(-3/2) = 4,625 \\ f(-9/4) = -1,89 \end{cases}$

$I^{(2)} = \left[-\frac{9}{4}, -\frac{3}{2}\right]$ $\begin{cases} f(-9/4) = -1,89 \\ f(-3/2) = 4,625 \\ f(-15/8) = 2,16 \end{cases}$



* Método de Newton: $\begin{cases} \bullet \text{ sinal de } f(a)f(b) \\ \bullet \text{ comportamento da função (derivada} \end{cases}$



curva d: $\begin{cases} y = ax + b \\ \underline{a = f'(x^{(0)})} \end{cases}$

$f(x^{(0)}) = f'(x^{(0)})\, x^{(0)} + b$

$\underline{b = f(x^{(0)}) - f'(x^{(0)})\, x^{(0)}}$

curva d: $\boxed{y = f'(x^{(0)})(x - x^{(0)}) + f(x^{(0)})}$

novo $x^{(1)}$ → onde $y = 0$ → $f'(x^{(0)})(x^{(1)} - x^{(0)}) + f(x^{(0)}) = 0$

$$x^{(1)} = x^{(0)} - \frac{f(x^{(0)})}{f'(x^{(0)})}$$

no caso geral: $$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{f'(x^{(k)})}}$$

obs.: • se f é contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b)

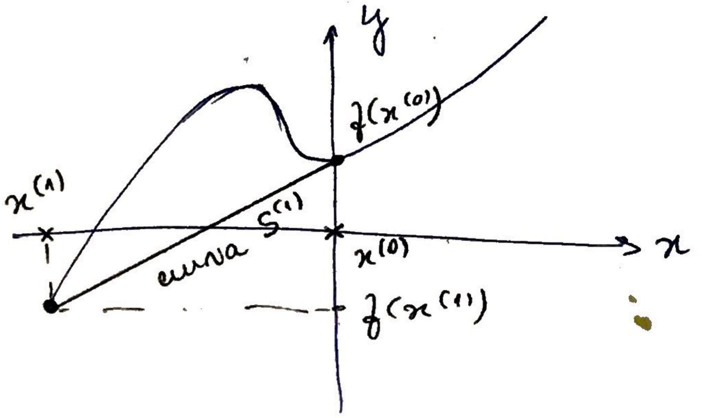
• problema perto de regiões onde $f'(x^{(k)}) \approx 0$.

• precisa conhecer $f'(x)$.

* Método da secante:
↳ reta que intercepta uma curva em pelo menos 2 pontos

• se a derivada não está disponível

• começa com $x^{(0)}$ e $x^{(1)}$ tal que $f(x^{(0)})\, f(x^{(1)}) < 0$



curva $S^{(1)}$: $y = ax + b$

$$\begin{cases} a = \dfrac{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}{x^{(1)} - x^{(0)}} \\ b = f(x^{(1)}) - a\, x^{(1)} \end{cases}$$

$$y = \frac{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}{x^{(1)} - x^{(0)}} (x - x^{(1)}) + f(x^{(1)}) = 0$$

$x^{(2)} \rightarrow$ onde $y = 0 \rightarrow$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{\left(\frac{f(x^{(1)}) - f(x^{(0)})}{(x^{(1)} - x^{(0)})}\right)}$$

no caso geral:

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f(x^{(k)})}{\left(\frac{f(x^{(k)}) - f(x^{(k-1)})}{(x^{(k)} - x^{(k-1)})}\right)}}$$

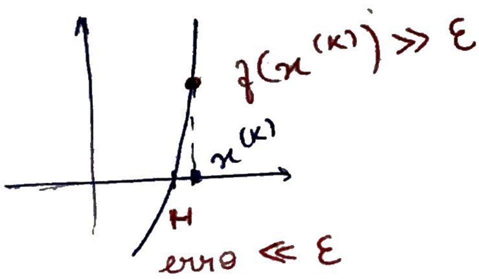
* Critério de parada:

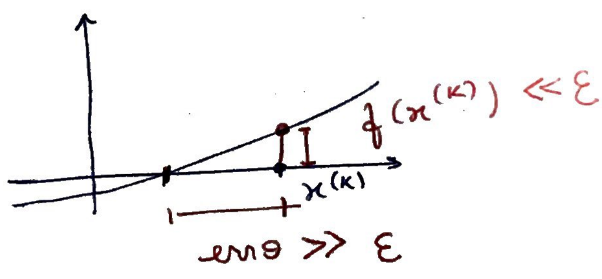
ideal • erro relativo: $\dfrac{|\overset{a}{x^{(k+1)}} - \overset{b}{x^{(k)}}|}{|\underset{a}{x^{(k+1)}}|} < \varepsilon$

ruins $\left\{\begin{array}{l} \bullet \text{ resíduo: } |f(x^{(k)})| < \varepsilon \\ \bullet \text{ erro absoluto: } |x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon \end{array}\right.$

• número máximo de iterações

resíduo:





* Comparação:

• bissecção:
- dado $f(x)$ contínua em $[a,b]$ e $f(a)f(b) < 0$, sempre funciona (convergente)
- simples
- lento

- Newton: $\begin{cases} \bullet \text{ requer } f'(x) \\ \bullet \text{ requer } x^{(0)} \text{ adequado para convergir} \\ \bullet \text{ mais rápido} \end{cases}$

- secante: $\begin{cases} \bullet \text{ não requer } f'(x) \\ \bullet \text{ requer } x^{(0)} \text{ e } x^{(1)} \text{ adequados para convergir} \\ \bullet \text{ custo intermediário} \end{cases}$

Matlab: combina bisseção, secante e interpolação.

ex) $f(x) = 10\, x \exp(-x^2) - 1$

$I^{(0)} = [-1, 3] \rightarrow$ diverge

$I^{(0)} = [-1, 1] \rightarrow$ converge