Cap24 – Tabelas e Figuras

CAPACITÂNCIA E DIELÉTRICOS

24

Um capacitor é um dispositivo que armazena energia potencial *elétrica* e carga elétrica. Para fazer um capacitor, basta colocar um isolante entre dois condutores. Para armazenar energia nesse dispositivo, transfira carga de um condutor para outro, de modo que um deles fique com uma carga negativa e o outro fique com carga igual, mas de sinal positivo. É necessário realizar um trabalho para deslocar essas cargas até que se estabeleça uma diferença de potencial resultante entre os condutores, e o trabalho realizado é armazenado sob forma de energia potencial elétrica.

24.1 Capacitância e capacitores

Um **capacitor** (Figura 24.1) é um sistema constituído por dois condutores separados por um isolante (ou imersos no vácuo). cada condutor possui, inicialmente, carga líquida igual a zero e há transferência de elétrons de um condutor para o outro; dizemos, nesse caso, que o capacitor está sendo *carregado*. No equilíbrio, os dois condutores possuem cargas de mesmo módulo, mas de sinais contrários, e a carga *líquida* no capacitor como um todo permanece igual a zero. Supomos, neste capítulo, que esse caso sempre seja válido. Quando afirmamos que um capacitor possui uma carga Q, ou que existe uma carga Q *armazenada* em um capacitor, queremos dizer que o condutor que está a um potencial mais elevado possui carga $+Q$ e o condutor com o potencial mais baixo possui carga $-Q$ (supondo que Q seja positiva).

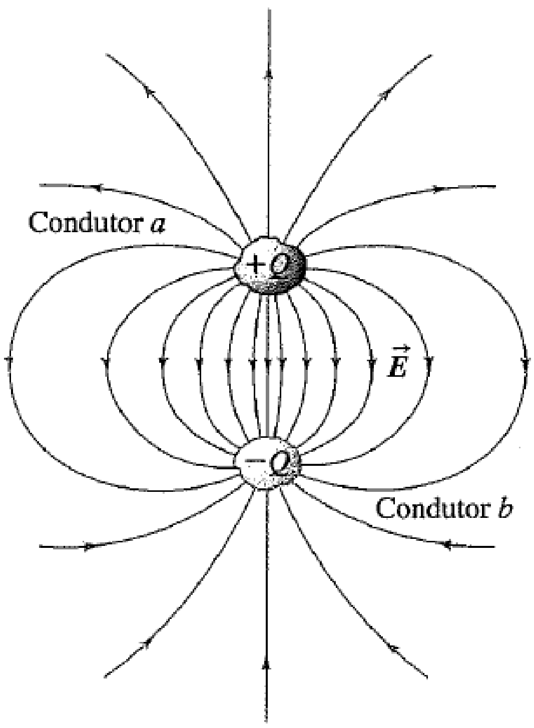

Figura 24.1 Um capacitor é constituído por qualquer par de condutores *a* e *b* isolados.

Nos diagramas de circuitos, um capacitor pode ser representado por qualquer um dos seguintes símbolos:

Nesses símbolos, as linhas verticais (retas ou curvas) representam os condutores e as linhas horizontais, fios conectados aos condutores. Um método comum de carregar um capacitor consiste em conectar esses dois fios aos terminais opostos de uma bateria. Quando as cargas $+Q$ e $-Q$ são estabelecidas sobre os condutores, os fios são desconectados da bateria. Isso fornece uma *diferença de potencial* fixa V_{ab} entre os condutores (ou seja, o potencial do condutor com carga positiva a em relação ao condutor com carga negativa b), que é precisamente igual à voltagem da bateria.

O campo elétrico em qualquer ponto na região entre os condutores é proporcional ao módulo Q da carga em cada condutor. A partir disso, podemos concluir que a diferença de potencial V_{ab} entre os condutores também é proporcional a Q. Quando dobramos o módulo da carga de cada condutor, dobramos também a densidade de carga em cada ponto, o campo elétrico em cada ponto e a diferença de potencial entre os condutores; contudo, a *razão* entre a carga e a diferença de potencial não varia. Essa razão é chamada de **capacitância** C do capacitor:

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} \qquad (24.1)$$

(definição de capacitância)

A unidade SI de capacitância é um **farad** (1 F), em homenagem a Michael Faraday, físico inglês do século 19. Pela Equação (24.1), um farad é igual a um *coulomb por volt* (1 C/V):

$$1\ \text{F} = 1\ \text{farad} = 1\ \text{C/V} = 1\ \text{coulomb/volt}$$

Quanto maior for a capacitância C de um capacitor, maior será o módulo Q da carga em cada condutor para uma dada diferença de potencial V_{ab} e, portanto, maior a energia armazenada.

Portanto, *a capacitância é a medida da capacidade de armazenar energia de um dado capacitor.* Veremos que o valor da capacitância depende somente da forma e do tamanho de cada condutor e da natureza do material isolante que existe entre os condutores.

Cálculo da capacitância: capacitores no vácuo

Podemos calcular a capacitância C de um dado capacitor determinando a diferença de potencial V_{ab} entre os condutores para um dado módulo da carga Q e, a seguir, usando a Equação (24.1). No momento, vamos considerar apenas *capacitores no vácuo*, ou seja, vamos supor que

existista apenas o espaço vazio entre os dois condutores que constituem o capacitor.

O capacitor mais simples é constituído por duas placas condutoras paralelas, cada uma delas com área A, separadas por uma distância d pequena em comparação às suas dimensões (Figura 24.2a). Quando as placas são carregadas, o campo elétrico é quase completamente localizado na região existente entre as placas (Figura 24.2b).

o campo entre essas duas placas é essencialmente *uniforme* e as cargas sobre as placas são distribuídas uniformemente sobre suas superfícies opostas. Esse arranjo é chamado de **capacitor com placas paralelas**.

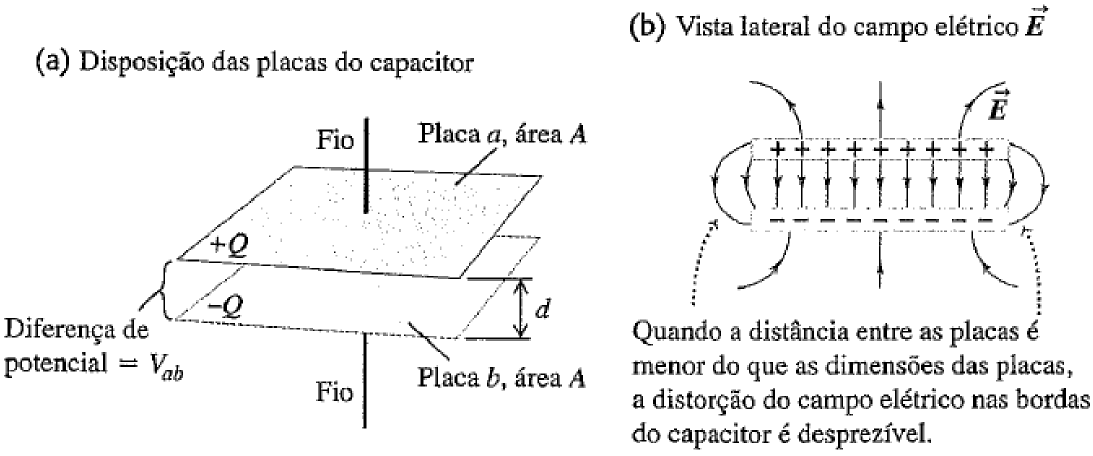

Figura 24.2 Um capacitor de placas paralelas carregado.

Determinamos o módulo E do campo elétrico desse arranjo usando o princípio da superposição dos campos elétricos; e também usando a lei de Gauss. Verificamos que $E = \sigma/\epsilon_0$, em que σ é o módulo (valor absoluto) da densidade de carga superficial sobre cada placa. Essa densidade é igual ao módulo da carga Q dividido pela área A da placa, ou $\sigma = Q/A$; logo, o módulo E do campo elétrico pode ser escrito do seguinte modo:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

O campo é uniforme e a distância entre as placas é d; logo, a diferença de potencial (voltagem) entre as duas placas é dada por

$$V_{ab} = Ed = \frac{1}{\epsilon_0}\frac{Qd}{A}$$

Pelas relações anteriores, vemos que a capacitância C de um capacitor com placas paralelas no vácuo é dada por

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \epsilon_0 \frac{A}{d} \qquad (24.2)$$

(capacitância de um capacitor com placas paralelas no vácuo)

A capacitância depende somente da geometria do capacitor; ela é diretamente proporcional à área A de cada placa e inversamente proporcional à distância d entre as placas. As grandezas d e A são constantes para um dado capacitor e ϵ_0 é uma constante universal. Logo, no vácuo, a capacitância C é uma constante independente da carga do capacitor e da diferença de potencial entre as placas. Se uma das placas do capacitor for flexível, a capacitância C irá variar se a distância d entre as placas variar.

Quando existe um material entre as placas, suas propriedades influenciam a capacitância.

Na Equação (24.2), quando A é dado em metros quadrados e d em metros, C é dado em farads. As unidades de ϵ_0 são $C^2/N \cdot m^2$, portanto notamos que

$$1\ F = 1\ C^2/N \cdot m = 1\ C^2/J$$

Como 1 V = 1 J/C (energia por unidade de carga), isso é consistente com nossa definição 1 F = 1 C/V. Finalmente, as unidades de ϵ_0 podem ser expressas como $1\ C^2/N \cdot m^2 =$ 1 F/m; logo,

$$\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ F/m$$

Essa relação é útil em cálculos de capacitância e também nos auxilia a verificar que a Equação (24.2) é dimensionalmente consistente.

Para *qualquer* capacitor no vácuo, a capacitância C depende somente das formas, das dimensões e da distância entre os condutores que constituem o capacitor. Quando as formas dos condutores são mais complexas do que as placas planas de um capacitor com placas paralelas, as expressões das capacitâncias são mais complexas do que a indicada na Equação (24.2).

PROPRIEDADES DE UM CAPACITOR COM PLACAS PARALELAS A distância entre as placas de um capacitor com placas paralelas é igual a 5,0 mm e a área da placa é de 2,0 m^2. Uma diferença de potencial de 10000 V (10,0 kV) é mantida através do capacitor. Calcule (a) a capacitância; (b) a carga de cada placa e (c) o módulo do campo elétrico no espaço entre as placas.

são fornecidas a área da placa A, a distância entre as placas d e a diferença de potencial V_{ab} para esse capacitor com placas paralelas. As incógnitas do problema são a capacitância C, a carga Q e o módulo do campo elétrico E.

usamos a Equação (24.2) para calcular C e, a seguir, obtemos a carga Q sobre cada placa, usando a diferença potencial V_{ab} fornecida e a Equação (24.1). Após obter Q, determinamos o campo elétrico entre as placas, usando a relação $E = Q/\epsilon_0 A$.

(a) Pela Equação (24.2),

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{(8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m})(2{,}0\,\mathrm{m}^2)}{5{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}}$$
$$= 3{,}54 \times 10^{-9}\,\mathrm{F} = 0{,}00354\,\mu\mathrm{F}$$

(b) A carga no capacitor é

$$Q = CV_{ab} = (3{,}54 \times 10^{-9}\,\mathrm{C/V})(1{,}0 \times 10^{4}\,\mathrm{V})$$
$$= 3{,}54 \times 10^{-5}\,\mathrm{C} = 35{,}4\,\mu\mathrm{C}$$

A placa com o potencial mais elevado possui carga +35,4 μC e a outra placa possui carga –35,4 μC.

(c) O módulo do campo elétrico é

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = \frac{3{,}54 \times 10^{-5}\,\mathrm{C}}{(8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N \cdot m^2})(2{,}0\,\mathrm{m}^2)}$$
$$= 2{,}0 \times 10^{6}\,\mathrm{N/C}$$

podemos obter esse mesmo resultado lembrando que o campo elétrico é igual ao módulo do gradiente de potencial Visto que o campo entre as placas é uniforme,

$$E = \frac{V_{ab}}{d} = \frac{1{,}0 \times 10^{4}\,\mathrm{V}}{5{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}} = 2{,}0 \times 10^{6}\,\mathrm{V/m}$$

UM CAPACITOR ESFÉRICO Duas cascas esféricas condutoras concêntricas estão separadas pelo vácuo. A casca esférica interna possui carga total $+Q$ e raio externo r_a, e a casca esférica externa possui carga $-Q$ e raio interno r_b (Figura 24.5). (A casca interna está ligada à casca externa por finas varas isolantes, que exercem efeito desprezível sobre a capacitância.) Calcule a capacitância desse capacitor esférico.

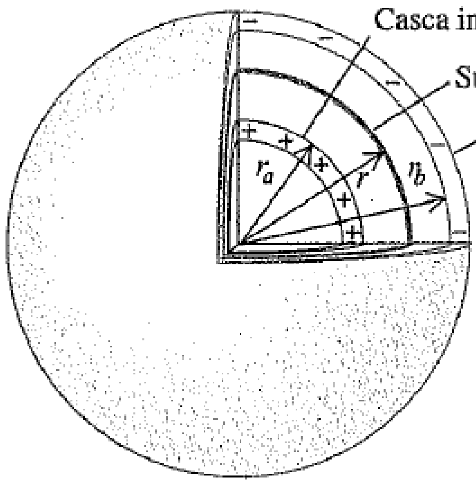

Figura 24.5 Um capacitor esférico.

não se trata de um capacitor com placas paralelas, logo não podemos usar as relações desenvolvidas para essa geometria em particular. Em vez disso, consideramos a definição fundamental de capacitância: o módulo da carga sobre qualquer condutor dividido pela diferença de potencial entre os condutores.

usaremos a lei de Gauss para encontrar o campo elétrico entre os condutores esféricos e, a partir disso, determinar a diferença de potencial V_{ab} entre os condutores; então, aplicaremos a Equação (24.1) para determinar a capacitância $C = Q/V_{ab}$.

tomamos como nossa superfície gaussiana uma esfera com raio r entre as duas esferas concêntricas. A lei de Gauss, afirma que o fluxo elétrico através dessa superfície é igual à carga total existente no interior dessa superfície dividida por ϵ_0:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inte}}}{\epsilon_0}$$

Por simetria, $\vec{E}$ é constante em módulo e paralelo a $d\vec{A}$ em cada ponto dessa superfície, de modo que a integral na lei de Gauss é igual a $(E)(4\pi r^2)$. A carga total no interior da superfície é $Q_{\text{inte}} = Q$; logo,

$$(E)(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

O campo elétrico entre as esferas é precisamente dado pela carga sobre a superfície interna; a superfície externa não contribui para esse campo. Verificamos,   que a carga sobre uma superfície esférica condutora produz campo elétrico igual a zero no interior da superfície esférica; isso também nos informa que o condutor externo não dá nenhuma contribuição para o campo elétrico entre os condutores.

A expressão anterior de E é a mesma que a de uma carga puntiforme Q, de modo que a expressão do potencial coincide com a do potencial de uma carga puntiforme, $V = Q/4\pi\epsilon_0 r$. Portanto, o potencial do condutor interno (positivo) para $r = r_a$ em relação ao condutor externo (negativo) para $r = r_b$ é

$$V_{ab} = V_a - V_b = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_a} - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_b}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

Finalmente, a capacitância é

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

Como exemplo, se $r_a = 9{,}5$ cm e $r_b = 10{,}5$ cm,

$$C = 4\pi(8{,}85 \times 10^{-12}\,\text{F/m})\frac{(0{,}095\text{ m})(0{,}105\text{ m})}{0{,}010\text{ m}}$$

$$= 1{,}1 \times 10^{-10}\,\text{F} = 110\text{ pF}$$

podemos relacionar esse resultado à capacitância de um capacitor com placas paralelas. A quantidade $4\pi r_a r_b$ é intermediária entre as áreas $4\pi r_a^2$ e $4\pi r_b^2$ das duas esferas; de fato, ela é a *média geométrica* dessas duas áreas, que podemos designar por A_{geo}. A distância entre as esferas é $d = r_b - r_a$; logo, podemos reescrever o resultado como $C = \epsilon_0 A_{geo}/d$. Essa é a mesma forma da capacitância do capacitor com placas paralelas: $C = \epsilon_0 A/d$. A partir disso, podemos concluir que, se a distância entre as esferas é muito menor do que seus raios, as esferas se comportam como um capacitor com placas paralelas com a mesma distância entre as placas e com a mesma área.

UM CAPACITOR CILÍNDRICO Um cilindro condutor longo possui um raio r_a e uma densidade de carga linear $+\lambda$. Ele está circundado por uma casca cilíndrica co-axial condutora com raio

interno r_b e densidade de carga linear $-\lambda$ (Figura 24.6). Calcule a capacitância por unidade de comprimento desse capacitor, supondo que exista vácuo no espaço entre as superfícies cilíndricas.

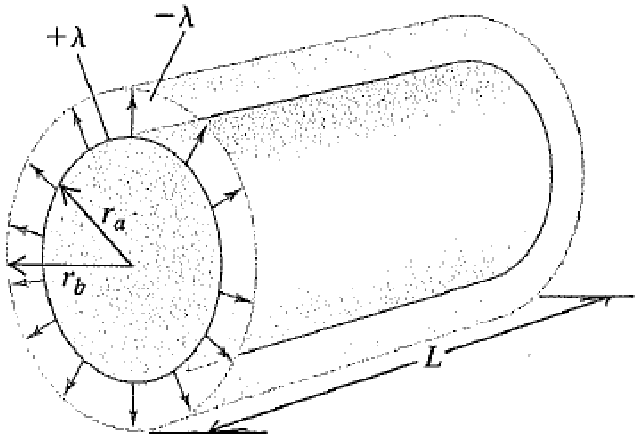

Figura 24.6 Um capacitor cilíndrico longo. A densidade de carga linear λ é considerada positiva nesta figura. O módulo da carga em um comprimento L de ambos os cilindros é igual a λL.

usaremos a definição fundamental de capacitância.

inicialmente, achamos as expressões para a diferença de potencial V_{ab} entre os cilindros e a carga Q em um comprimento L dos cilindros; a seguir, determinamos a capacitância de um comprimento L, usando a Equação (24.1). A nossa incógnita é essa capacitância dividida por L.

verificamos que, em um ponto situado no exterior de um cilindro carregado a uma distância r do centro, o potencial do cilindro é dado por

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

em que r_0 é o raio (arbitrário) para o qual $V = 0$. Podemos usar esse mesmo resultado para o potencial *entre* os cilindros neste problema porque, de acordo com a lei de Gauss, a carga sobre a superfície cilíndrica externa não contribui para o campo entre os cilindros Em nosso caso, escolhemos para r_0 o raio r_b, o raio da superfície interna do cilindro externo, de modo que o cilindro condutor externo possui potencial $V = 0$. Então, o potencial na superfície externa do condutor interno (em que $r = r_a$) é precisamente igual à diferença de potencial V_{ab} entre o cilindro interno (positivo) com raio a e o cilindro externo (negativo) com raio b; logo,

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}$$

Essa diferença de potencial é positiva (supondo λ positiva, como indica a Figura 24.6), porque o cilindro interno possui um potencial elétrico superior ao do cilindro externo.

A carga total Q existente no comprimento L é dada por $Q = \lambda L$, de modo que pela Equação (24.1) a capacitância C de um comprimento L é dada por

$$C = \frac{Q}{V_{ab}} = \frac{\lambda L}{\dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \dfrac{r_b}{r_a}} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln\left(r_b/r_a\right)}$$

A capacitância por unidade de comprimento é

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln (r_b/r_a)}$$

Substituindo $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m = 8,85 pF/m, obtemos

$$\frac{C}{L} = \frac{55{,}6 \text{ pF/m}}{\ln (r_b/r_a)}$$

vemos que a capacitância de cilindros co-axiais é determinada inteiramente pelas dimensões, tal como no caso do capacitor com placas paralelas. Um cabo co-axial é, geralmente, feito de modo semelhante, porém, em vez do vácuo, existe um material isolante entre os cilindros condutores.

24.2 Capacitores em série e em paralelo

Capacitores em série

A Figura 24.8a é um diagrama esquemático de uma **ligação em série**. Dois capacitores são conectados em série (um depois do outro) por meio de fios condutores entre os pontos *a* e *b*. Inicialmente, os dois capacitores não estão carregados. Quando uma diferença de potencial constante V_{ab} é aplicada entre os pontos *a* e *b*, os capacitores ficam carregados; a figura mostra que as cargas acumuladas em *todas* as placas condutoras possuem o mesmo módulo. Para entender esse comportamento, observe, inicialmente, que a placa superior de C_1 acumula carga positiva Q. O campo elétrico dessa carga positiva atrai cargas negativas para cima da placa inferior de C_1, até que todas as linhas de força que começam na placa superior terminem na placa inferior. Isso só é possível quando a placa inferior possui carga $-Q$. Essas cargas negativas são provenientes da placa superior de C_2, que se torna carregada positivamente com carga $+Q$. Essa carga positiva, a seguir, puxa uma carga negativa $-Q$ da conexão no ponto b até que ela fique acumulada na placa inferior de C_2. A carga total na placa inferior de C_1 e na placa superior de C_2 devem, juntas, ser sempre igual a zero, pois essas placas estão ligadas somente entre si e não existe nenhuma fonte entre elas. Portanto, *em uma ligação em série, o módulo de cada carga em todas as placas é sempre o mesmo.*

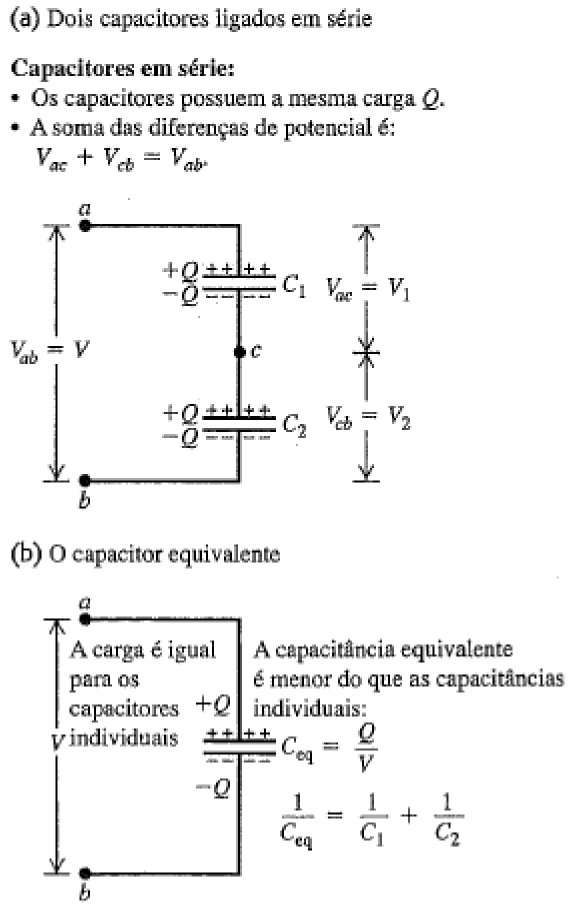

Figura 24.8 Ligação em série de dois capacitores.

Observando novamente a Figura 24.8a, podemos escrever as seguintes diferenças de potencial entre os pontos a e c, c e b e a e b

$$V_{ac} = V_1 = \frac{Q}{C_1} \qquad V_{cb} = V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$V_{ab} = V = V_1 + V_2 = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$$

e, portanto,

$$\frac{V}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \qquad (24.3)$$

Seguindo uma convenção comum, usamos os símbolos V_1, V_2 e V para designar, respectivamente, as seguintes *diferenças* de potencial: V_{ac} (através do primeiro capacitor), V_{cb} (através do segundo capacitor) e V_{ab} (através da combinação inteira dos capacitores).

A **capacitância equivalente** C_{eq} dessa combinação em série é definida como a capacitância de um *único* capacitor para o qual a carga Q será a mesma que a da combinação quando a diferença de potencial V for a mesma. Em outras palavras, a combinação dos capacitores pode ser substituída por um único *capacitor equivalente*, cuja capacitância é C_{eq}. Para tal capacitor, indicado na Figura 24.8b, temos

$$C_{eq} = \frac{Q}{V} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q} \qquad (24.4)$$

Combinando as equações (24.3) e (24.4), encontramos

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Podemos estender essa análise para um número qualquer de capacitores conectados em série. Encontramos o seguinte resultado para o *inverso* da capacitância equivalente:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots \qquad (24.5)$$

(capacitores em série)

O inverso da capacitância equivalente de uma associação de capacitores conectados em série é igual à soma dos inversos das capacitâncias de cada capacitor. Em uma ligação de capacitores em série, a capacitância equivalente é sempre *menor* do que qualquer uma das capacitâncias individuais.

Capacitores em paralelo

O arranjo indicado na Figura 24.9a denomina-se **ligação em paralelo**. Dois capacitores são conectados em paralelo entre os pontos a e b. Nesse caso, as placas superiores dos dois capacitores são conectadas por um fio condutor, constituindo uma superfície equipotencial, e as placas inferiores formam outra superfície equipotencial. Portanto, *em uma ligação em paralelo, a diferença de potencial é a mesma através de todos os capacitores*, sendo dada por $V_{ab} = V$. No entanto, as cargas Q_1 e Q_2 não são necessariamente iguais, visto que as cargas podem atingir as placas dos capacitores de forma independente a partir da fonte (como, por exemplo, uma bateria), cuja voltagem é V_{ab}. As cargas são dadas por

$$Q_1 = C_1 V \ \text{e} \ Q_2 = C_2 V$$

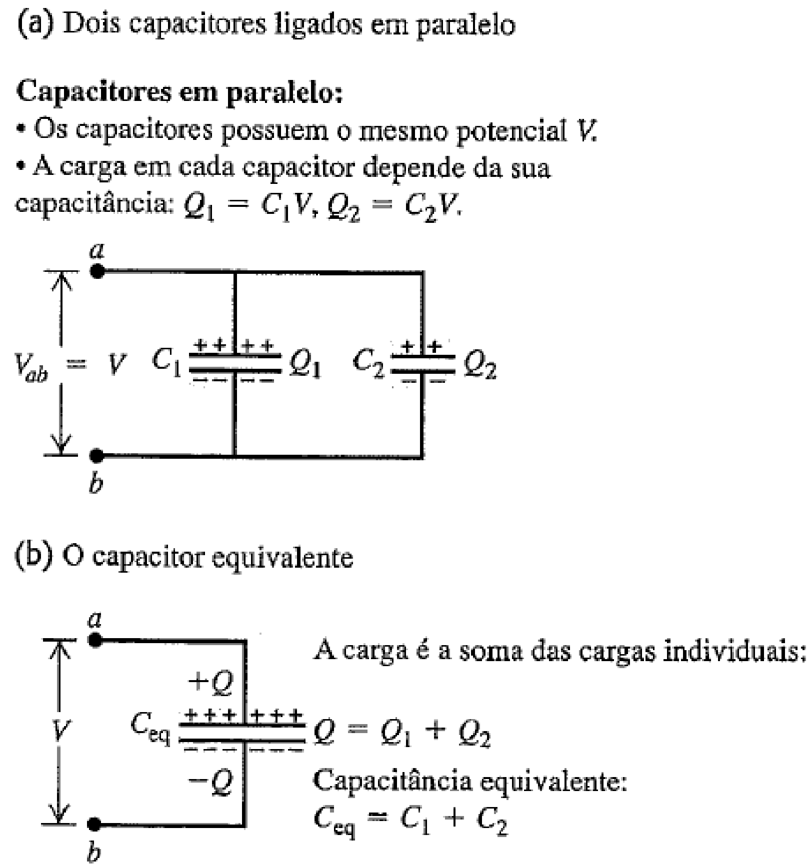

Figura 24.9 Ligação paralela entre dois capacitores.

A carga *total* Q da combinação e, portanto, a carga total no capacitor equivalente são dadas por

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V$$

logo,

$$\frac{Q}{V} = C_1 + C_2 \qquad (24.6)$$

A combinação em paralelo é equivalente a um único capacitor com a mesma carga total $Q = Q_1 + Q_2$ e com a mesma diferença de potencial V da associação (Figura 24.9b). A capacitância equivalente da combinação, C_{eq}, é dada pela razão Q/V desse capacitor único. Portanto, pela Equação (24.6),

$$C_{eq} = C_1 + C_2$$

De modo análogo, podemos mostrar que, para um número qualquer de capacitores em paralelo,

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots$$
$$\text{(capacitores em paralelo)} \qquad (24.7)$$

A capacitância equivalente de uma combinação de capacitores ligados em paralelo é igual à *soma* das capacitâncias individuais. Em uma ligação em paralelo, a capacitância equivalente é sempre *maior* do que qualquer capacitância individual.

24.3 Armazenamento de energia em capacitores e energia do campo elétrico

A energia potencial elétrica armazenada em um capacitor carregado é exatamente igual ao trabalho realizado para carregá-lo, ou seja, o trabalho necessário para separar cargas opostas e depositá-las em diferentes condutores. Quando o capacitor é descarregado, essa energia é recuperada como trabalho realizado pelas forças elétricas.

Podemos determinar a energia potencial U de um capacitor carregado calculando o trabalho W necessário para carregá-lo. Suponha que, depois do processo, a carga final seja Q e a diferença de potencial final seja V. De acordo com a Equação (24.1), essas grandezas são relacionadas por

$$V = \frac{Q}{C}$$

Seja q a carga e v a diferença de potencial em uma dada etapa intermediária durante o processo de armazenamento de carga; então, $v = q/C$. Nessa etapa, o trabalho dW necessário para transferir um elemento de carga adicional dq é dado por

$$dW = v\, dq = \frac{q\, dq}{C}$$

O trabalho total W necessário para aumentar a carga q de zero até um valor final Q é

$$W = \int_0^W dW = \frac{1}{C}\int_0^Q q\, dq = \frac{Q^2}{2C} \qquad (24.8)$$

(trabalho para carregar um capacitor)

Esse trabalho é também igual ao trabalho total realizado pelo campo elétrico sobre a carga quando o capacitor é descarregado. Então, q *diminui* de um valor inicial Q até zero à medida que cada elemento de carga dq 'se escoa' por meio de diferenças de potencial v que variam desde V até zero.

Definindo como zero a energia potencial de um capacitor *descarregado*, então W na Equação (24.8) é igual à energia potencial U do capacitor carregado. A carga final acumulada é dada por $Q = CV$, de modo que podemos expressar U (que é igual a W) do seguinte modo:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \qquad (24.9)$$

(energia potencial acumulada em um capacitor)

Quando Q é dado em coulombs, C em farads (coulombs por volt) e V em volts (joules por coulomb), U é dado em joules.

A última forma da Equação (24.9), $U = \frac{1}{2}QV$, mostra que o trabalho total W necessário para carregar o capacitor é igual à carga total Q multiplicada pela diferença de potencial *média* $\frac{1}{2}V$ durante o processo de carga.

As equações (24.8) e (24.9) mostram que a capacitância mede a capacidade do capacitor de armazenar, simultaneamente, carga e energia. Quando um capacitor é carregado por meio de uma conexão a uma bateria ou por fonte que fornece uma diferença de potencial fixa V, então, se aumentamos o valor de C, obtemos uma carga maior $Q = CV$ e uma quantidade maior de energia acumulada $U = \frac{1}{2}CV^2$. Quando o objetivo é transferir uma dada quantidade de carga Q de um condutor para outro, a Equação (24.8) mostra que o trabalho W necessário é inversamente proporcional a C; quanto maior for a capacitância, mais fácil será fornecer ao capacitor uma quantidade fixa de carga.

Energia do campo elétrico

Podemos carregar um capacitor transferindo diretamente elétrons de uma placa para outra. Para isso, é necessário realizar um trabalho contra o campo elétrico entre as placas. Portanto, podemos imaginar que a energia esteja armazenada *no campo* na região entre as placas. Para desenvolvermos essa relação, vamos calcular a energia *por unidade de volume* no espaço existente entre as placas de um capacitor com placas paralelas de área A e separadas por uma distância d. Essa grandeza denomina-se **densidade de energia**, designada pela letra u. Pela Equação (24.9), a energia potencial total armazenada é igual a $\frac{1}{2}CV^2$ e o volume entre as placas é Ad; portanto, a densidade de energia é

$$u = \text{densidade de energia} = \frac{\frac{1}{2}CV^2}{Ad} \qquad (24.10)$$

Pela Equação (24.2), a capacitância C é dada por $C = \epsilon_0 A/d$. A diferença de potencial V é relacionada ao módulo do campo elétrico E por $V = Ed$. Usando essas relações na Equação (24.10), os fatores geométricos A e d se cancelam e encontramos

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \qquad (24.11)$$

(densidade de energia elétrica no vácuo)

Embora essa relação tenha sido deduzida somente para um capacitor com placas paralelas, verifica-se que ela é válida para qualquer capacitor no vácuo e, na verdade, para *qualquer configuração do campo elétrico no vácuo*. Esse resultado possui uma conseqüência importante. Imaginamos que o vácuo seja um espaço no qual não existe matéria, contudo no vácuo pode existir um campo elétrico e, portanto, ele pode possuir energia. Logo, o espaço 'vazio', afinal de contas, não precisa ser verdadeiramente vazio.

TRANSFERÊNCIA DE CARGA E DE ENERGIA ENTRE CAPACITORES Na Figura 24.12, carregamos um capacitor de carga $C_1 = 8{,}0\ \mu F$ conectando-o a uma fonte de energia potencial $V_0 = 120$ V (não mostrada na figura). A chave S está, inicialmente, aberta. Depois de carregar C_1, a fonte da diferença de potencial é desconectada. (a) Qual é a carga Q_0 sobre C_1 quando a chave S é mantida aberta? (b) Qual é a energia armazenada em C_1 quando a chave S é mantida aberta? (c) O capacitor de capacitância $C_2 = 4{,}0\ \mu F$ está inicialmente descarregado. Depois de fechar a chave S, qual é a diferença de potencial através de cada capacitor e qual é a carga de cada capacitor? (d) Qual é a energia total do sistema depois que fechamos a chave S?

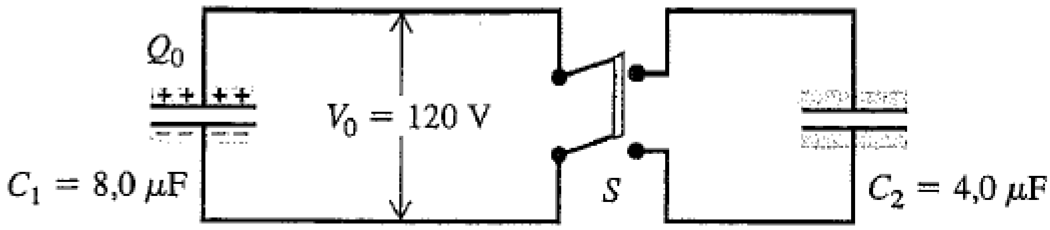

Figura 24.12 Quando a chave S está fechada, o capacitor carregado C_1 fica conectado ao capacitor descarregado C_2. A parte central da chave possui uma alça isolante; as cargas só podem ser transferidas entre os dois terminais superiores e entre os dois terminais inferiores dos capacitores.

inicialmente, temos um capacitor único com uma dada diferença de potencial entre suas placas. Quando a chave é fechada, um fio conecta as placas superiores dos dois capacitores e outro fio conecta as placas inferiores; em outras palavras, os capacitores são ligados em paralelo.

nos itens (a) e (b), obtemos a carga e a energia armazenada para o capacitor C_1 usando as equações (24.1) e (24.9), respectivamente. No item (c), usamos a propriedade da

ligação em paralelo para determinar como a carga Q_0 é compartilhada entre os dois capacitores. No item (d), novamente usamos a Equação (24.9) para determinar a energia armazenada nos capacitores C_1 e C_2; a energia total é a soma desses valores.

(a) A carga Q_0 no capacitor de capacitância C_1 é

$$Q_0 = C_1 V_0 = (8{,}0\ \mu\text{F})(120\ \text{V}) = 960\ \mu\text{C}$$

(b) A energia armazenada inicialmente no capacitor é dada por

$$U_{\text{inicial}} = \frac{1}{2} Q_0 V_0 = \frac{1}{2}(960 \times 10^{-6}\ \text{C})(120\ \text{V}) = 0{,}058\ \text{J}$$

(c) Quando a chave é fechada, a carga positiva Q_0 fica distribuída sobre as placas superiores dos dois capacitores; e a carga negativa $-Q$ fica distribuída sobre as placas inferiores. Sejam Q_1 e Q_2 os módulos das cargas finais dos dois capacitores. De acordo com a conservação da carga,

$$Q_1 + Q_2 = Q_0$$

No estado final, quando as cargas não se movem mais, as duas placas superiores ficam com o mesmo potencial; elas estão conectadas por um fio condutor e, portanto, formam uma única superfície equipotencial. As duas placas inferiores também estão no mesmo potencial, diferente do potencial das placas superiores. A diferença de potencial final V entre as placas é, portanto, a mesma para ambos os capacitores; em outras palavras, trata-se de uma ligação em paralelo. As cargas dos capacitores são

$$Q_1 = C_1 V \qquad Q_2 = C_2 V$$

Quando combinamos essa relação à equação precedente, baseada na conservação da carga, encontramos

$$V = \frac{Q_0}{C_1 + C_2} = \frac{960\ \mu\text{C}}{8{,}0\ \mu\text{F} + 4{,}0\ \mu\text{F}} = 80\ \text{V}$$

$$Q_1 = 640\ \mu\text{C} \qquad Q_2 = 320\ \mu\text{C}$$

(d) A energia final do sistema é a soma das energias armazenadas em cada capacitor:

$$U_{\text{final}} = \frac{1}{2}Q_1V + \frac{1}{2}Q_2V = \frac{1}{2}Q_0V$$

$$= \frac{1}{2}(960 \times 10^{-6}\ \text{C})(80\ \text{V}) = 0{,}038\ \text{J}$$

esse resultado é menor do que a energia original $U_{\text{inicial}} = 0{,}058$ J; a diferença foi convertida em outra forma de energia. Os condutores tornam-se ligeiramente mais quentes por causa da resistência, e outra parte da energia foi irradiada sob a forma de ondas eletromagnéticas.

ENERGIA DO CAMPO ELÉTRICO Suponha que você queira armazenar 1,0 J de energia potencial elétrica em um volume de 1,0 m^3 no vácuo. (a) Qual é o módulo do campo elétrico necessário? (b) Caso o módulo do campo elétrico fosse dez vezes maior, qual seria a quantidade de energia armazenada por metro cúbico?

usamos a relação entre o módulo do campo elétrico E e a densidade de energia u, que é igual à energia do campo elétrico dividida pelo volume ocupado pelo campo.

no item (a) usamos a informação fornecida para achar u, a seguir, aplicamos a Equação (24.11) para obter o valor requerido de E. Essa mesma equação nos fornece a relação entre as variações em E e as variações correspondentes em u.

(a) A densidade de energia desejada é $u = (1{,}0\text{ J})/\text{m}^3$. Explicitando E da Equação (24.11), obtemos:

$$E = \sqrt{\frac{2u}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{2(1{,}0\text{ J}/\text{m}^3)}{8{,}85 \times 10^{-12}\text{ C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2}}$$
$$= 4{,}75 \times 10^5\text{ N/C} = 4{,}75 \times 10^5\text{ V/m}$$

(b) A Equação (24.11) mostra que u é proporcional a E^2. Quando E aumenta de um fator 10, u aumenta de um fator $10^2 = 100$ e a densidade de energia passa para 100 J/m^3.

o valor de E obtido no item (a) é considerável, correspondendo a uma diferença de potencial de quase meio milhão de volts por uma distância de 1 metro.

DOIS MÉTODOS PARA CALCULAR A ENERGIA ARMAZENADA EM UM CAPACITOR O capacitor esférico

possui cargas $+Q$ e $-Q$ sobre os condutores do interior e do exterior da esfera. Calcule a energia potencial elétrica armazenada no capacitor (a) usando a capacitância C

(b) integrando a densidade de energia do campo elétrico.

este problema nos leva a pensar sobre a energia armazenada em um capacitor, U, de duas formas diferentes: em termos do trabalho realizado para colocar cargas nos dois condutores, $U = Q^2/2C$, e em termos da energia existente no campo elétrico entre os dois condutores. Ambas as descrições se equivalem, portanto ambas devem fornecer o mesmo resultado para U.

encontramos a capacitância C e o módulo do campo E entre os condutores. Obtivemos a energia armazenada U no item (a) usando a expressão para C na Equação (24.9). No item (b) usamos a expressão para E na Equação (24.11) para achar a densidade de energia no campo elétrico, u, entre os condutores. O módulo do campo depende da distância r do centro do capacitor, portanto u também depende de r. Logo, não podemos determinar U simplesmente multiplicando u pelo

volume existente entre os condutores; em vez disso, devemos integrar u sobre esse volume.

(a) verificamos que um capacitor esférico possui capacitância

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_a r_b}{r_b - r_a}$$

em que r_a e r_b são, respectivamente, o raio do condutor interno e o raio do condutor externo. De acordo com a Equação (24.9), a energia armazenada nesse capacitor é

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{r_b - r_a}{r_a r_b}$$

(b) O campo elétrico no volume entre os dois condutores esféricos possui módulo $E = Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. O campo elétrico é igual a zero no interior da esfera interna e fora da superfície interna da esfera externa, visto que uma superfície gaussiana com raio $r < r_a$ ou $r > r_b$ engloba uma região com carga elétrica total igual a zero. Portanto, a densidade de energia só não é nula no espaço entre as esferas ($r_a < r < r_b$). Nessa região,

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\epsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\right)^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}$$

A densidade de energia *não* é uniforme: ela diminui rapidamente à medida que a distância em relação ao centro do capacitor aumenta. Para calcularmos a energia elétrica total armazenada no campo elétrico, devemos integrar u (a energia por unidade de volume) sobre o volume entre a esfera condutora interna e a esfera externa. Dividindo esse volume em camadas esféricas de raio r, área superficial $4\pi r^2$, espessura dr e volume $dV = 4\pi r^2 dr$, obtemos

$$\begin{aligned} U &= \int u\, dV = \int_{r_a}^{r_b}\left(\frac{Q^2}{32\pi^2\epsilon_0 r^4}\right)4\pi r^2\, dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\int_{r_a}^{r_b}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\left(-\frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_a}\right) \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0}\frac{r_b - r_a}{r_a r_b} \end{aligned}$$

obtivemos o mesmo resultado para U por ambos os métodos. Enfatizamos que a energia potencial elétrica pode ser associada à distribuição das *cargas*, como na parte (a), ou ao *campo*, como na parte (b); independentemente do ponto de vista que você escolha, a quantidade de energia armazenada é a mesma.

24.4 Dielétricos

Quase todos os capacitores possuem entre suas placas condutoras um material isolante, ou **dielétrico**. Um tipo comum de capacitor usa como placas longas tiras metálicas, enroladas e separadas por tiras de um plástico, tal

como o milar. Um 'sanduíche' feito com esses materiais é enrolado, formando uma unidade que pode fornecer uma capacitância de diversos microfarads em uma embalagem compacta (Figura 24.13).

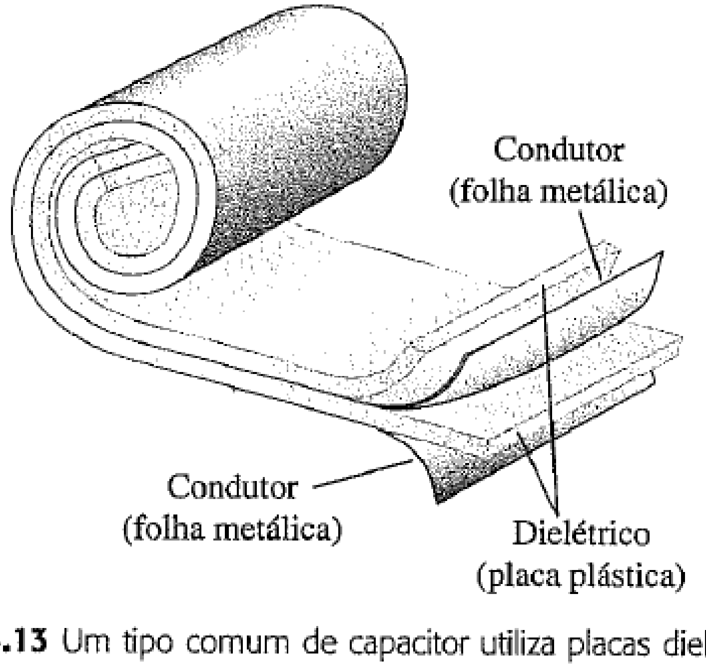

Figura 24.13 Um tipo comum de capacitor utiliza placas dielétricas para separar os condutores.

Colocar um dielétrico sólido entre as placas de um capacitor possui três objetivos. Em primeiro lugar, resolve o problema mecânico de manter duas grandes placas metálicas separadas por uma distância muito pequena, sem que ocorra contato entre elas.

Em segundo lugar, usando um dielétrico torna-se possível aumentar a diferença de potencial máxima entre as placas. qualquer material isolante, quando submetido a um campo elétrico suficientemente elevado, sofre uma **ruptura dielétrica**, uma ionização parcial que permite a condução através dele. Muitos materiais dielétricos conseguem suportar campos elétricos mais elevados do que o do ar, sem que ocorra ruptura do isolamento. Portanto, o uso de um dielétrico permite a sustentação de uma diferença de potencial mais elevada V e, assim, o capacitor pode acumular maior quantidade de carga e de energia.

Em terceiro lugar, a capacitância de um capacitor com dimensões fixas, quando existe um dielétrico entre as placas, é *maior* do que a capacitância do mesmo capacitor quando há vácuo entre as placas. Podemos verificar esse efeito usando um *eletrômetro* sensível, um dispositivo que permite a medida da diferença de potencial entre dois condutores, sem que haja apreciável fluxo de carga de um condutor para o outro. A Figura 24.14a mostra um eletrômetro conectado às placas de um capacitor carregado, sendo Q o módulo da carga de cada placa e V_0 a diferença de potencial. Quando inserimos entre as placas um dielétrico descarregado, tal como vidro, parafina ou poliestireno, a experiência mostra que a diferença de potencial *diminui* para um valor menor V (Figura 24.14b). Quando removemos o dielétrico, a diferença de potencial retorna a seu valor original V_0, o que mostra que as cargas originais do capacitor não se alteram.

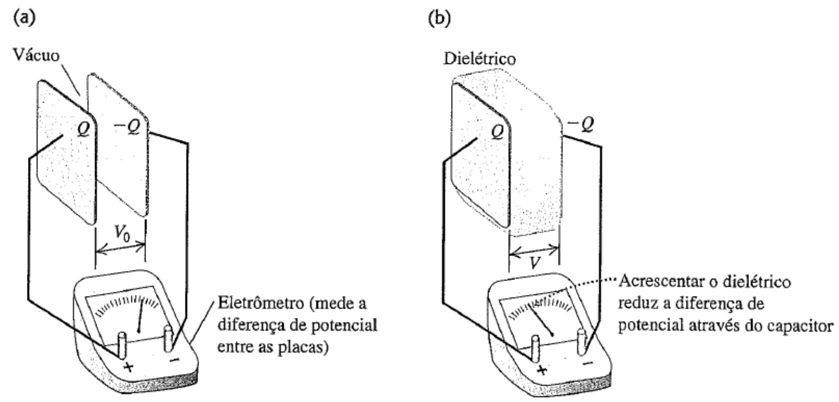

Figura 24.14 Efeito de um dielétrico colocado entre as placas de um capacitor com placas paralelas. (a) Para uma dada carga, a diferença de potencial é V_0. (b) Para a mesma carga, porém com um dielétrico colocado entre as placas, a diferença de potencial V é menor do que V_0.

A capacitância original C_0 é dada por $C_0 = Q/V_0$, e a capacitância quando o dielétrico está presente é dada por $C = Q/V$. A carga Q é a mesma nos dois casos e, como V é menor do que V_0, concluímos que a capacitância C com o dielétrico é *maior* do que C_0. Quando o espaço entre as placas se encontra completamente preenchido com o dielétrico, a razão C sobre C_0 (que é igual à razão entre V_0 e V) denomina-se **constante dielétrica** K do material:

$$K = \frac{C}{C_0} \tag{24.12}$$

(definição de constante dielétrica)

Quando a carga é constante, $Q = C_0V_0 = CV$ e $C/C_0 = V_0/V$. Nesse caso, a Equação (24.12) pode ser reescrita na forma

$$V = \frac{V_0}{K} \tag{24.13}$$

(quando Q é constante)

Quando o dielétrico está presente, a diferença de potencial para uma carga fixa Q é *reduzida* de um fator igual a K.

A constante dielétrica K é um número puro. Como C é sempre maior do que C_0, K é sempre maior do que 1. Alguns valores de K são fornecidos na Tabela 24.1. Para o vácuo, $K = 1$, por definição. Para o ar em temperatura e pressão comuns, K é aproximadamente igual a 1,0006; esse valor é tão próximo de 1 que, para as aplicações práticas, um capacitor no ar é equivalente a um capacitor no vácuo. Note que, embora a água possua um valor de K elevado, ela não é um dielétrico prático para ser usado em capacitores. A razão é que, embora a água pura seja um condutor pobre, ela também é um excelente solvente iônico. Qualquer íon dissolvido na água produz um fluxo de cargas entre as placas, de modo que o capacitor se descarrega.

Tabela 24.1 Valores da constante dielétrica k para 20°C

Material	K	Material	K
Vácuo	1	Cloreto de polivinila	3,18
Ar (1 atm)	1,00059	Plexiglas	3,40
Ar (100 atm)	1,0548	Vidro	5–10
Teflon	2,1	Neopreno	6,70
Polietileno	2,25	Germânio	16
Benzeno	2,28	Glicerina	42,5
Mica	3–6	Água	80,4
Miliar	3,1	Titanato de estrôncio	310

Nenhum dielétrico real é um isolante perfeito. Portanto, há sempre uma *corrente de fuga* entre as placas carregadas de um capacitor com um dielétrico.

ignoramos tacitamente esse efeito quando deduzimos as expressões para a capacitância equivalente de capacitores em série, Equação (24.5), e de capacitores em paralelo, Equação (24.7). Mas, caso exista uma corrente de fuga fluindo durante um tempo muito longo, capaz de alterar os valores das cargas que usamos para deduzir as equações (24.5) e (24.7), essas equações talvez já não sejam tão precisas.

Carga induzida e polarização

Quando um material dielétrico é inserido entre as placas, enquanto a carga é mantida constante, a diferença de potencial entre as placas diminui de um fator K. Portanto, o campo elétrico entre as placas deve diminuir do mesmo fator. Sendo E_0 o valor no vácuo, quando o dielétrico está presente o valor é igual a E, então

$$E = \frac{E_0}{K} \qquad (24.14)$$

(quando Q é constante)

Visto que o módulo do campo elétrico é menor quando o dielétrico está presente, a densidade de cargas superficial (que produz o campo) também deve ser menor. A carga superficial sobre as placas condutoras não varia, porém surge uma carga *induzida* com um sinal oposto ao da carga da placa em cada superfície do material dielétrico (Figura 24.15). O dielétrico estava, inicialmente, neutro e deve permanecer eletricamente neutro; as cargas induzidas na superfície surgem em conseqüência de uma *redistribuição* das cargas positivas e negativas no interior do material dielétrico, um fenômeno denominado **polarização**.

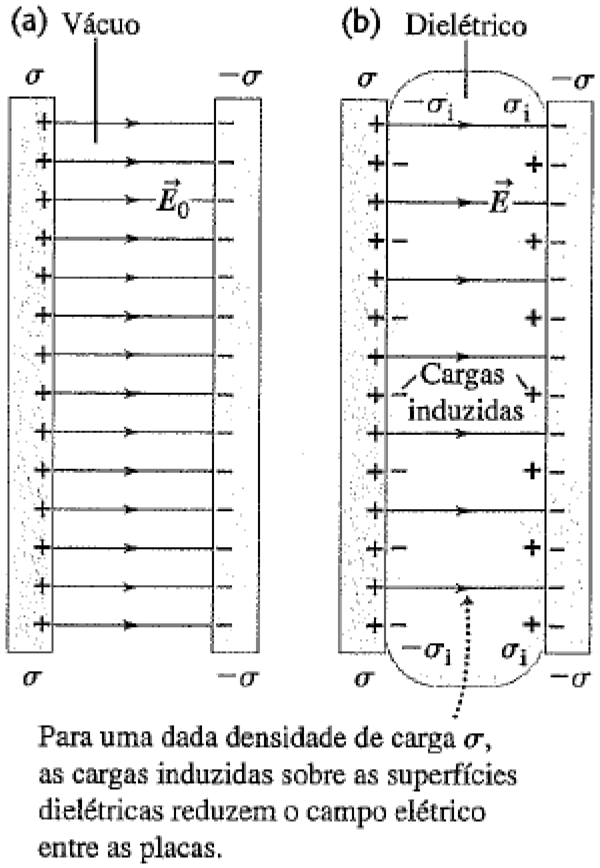

Figura 24.15 Linhas do campo elétrico com (a) vácuo entre as placas e (b) dielétrico entre as placas.

Vamos supor que a carga superficial induzida seja *diretamente proporcional* ao módulo E do campo elétrico no material; isso é o que efetivamente ocorre com muitos dielétricos comuns.

Nessas circunstâncias, K é constante para qualquer material particular. Quando o campo elétrico é muito forte ou quando o dielétrico é feito com certos materiais cristalinos, a relação entre a carga induzida e o campo elétrico pode ser mais complexa;

Para uma dada densidade de carga σ, as cargas induzidas sobre as superfícies dielétricas reduzem o campo elétrico entre as placas.

Podemos deduzir uma relação entre essa carga superficial induzida e a carga sobre as placas. Vamos designar o módulo da carga induzida por unidade de área da superfície do dielétrico (a densidade de carga superficial induzida) pelo símbolo σ_i. O módulo da densidade das cargas superficial sobre as placas do capacitor é designado por σ, como de costume.

Então a densidade de carga superficial *total* em cada lado do capacitor é igual a $(\sigma - \sigma_i)$, conforme indica a Figura 24.15b.

o campo entre as placas está relacionado à densidade de cargas líquidas superficial por $E = \sigma_{tot}/\epsilon_0$. Com e sem o dielétrico, respectivamente, temos

$$E_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \qquad E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} \tag{24.15}$$

Usando essas expressões na Equação (24.14) e reagrupando o resultado, encontramos

$$\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \tag{24.16}$$

(densidade de carga superficial induzida)

Essa equação mostra que, quando K é muito grande, σ_i é aproximadamente igual a σ. Nesse caso, σ_i praticamente cancela σ, e o campo e a diferença de potencial são muito menores do que seus respectivos valores no vácuo.

O produto $K\epsilon_0$ denomina-se **permissividade** do dielétrico, designado por ϵ:

$$\epsilon = K\epsilon_0 \tag{24.17}$$

(definição de permissividade)

Com base em ϵ, podemos expressar o campo elétrico dentro do dielétrico por meio da relação

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon} \tag{24.18}$$

A capacitância de um capacitor com um material dielétrico entre as placas é dada por

$$C = KC_0 = K\epsilon_0\frac{A}{d} = \epsilon\frac{A}{d} \tag{24.19}$$

(capacitor com placas paralelas, dielétrico entre as placas)

Podemos repetir a dedução da Equação (24.11) para a densidade de energia u em um campo elétrico para o caso no qual exista um dielétrico entre as placas. O resultado é

$$u = \frac{1}{2}K\epsilon_0E^2 = \frac{1}{2}\epsilon E^2 \tag{24.20}$$

(densidade de energia elétrica em um dielétrico)

No espaço vazio, temos $K = 1$, $\epsilon = \epsilon_0$, e as equações (24.19) e (24.20) se reduzem às equações (24.2) e (24.11), respectivamente, para um capacitor com placas paralelas no vácuo. Por essa razão, ϵ_0 é algumas vezes chamado de 'permissividade do vácuo' ou 'permissividade do espaço vazio'. Como K é um número puro, ϵ e ϵ_0 possuem as mesmas unidades, dadas por F/m ou $C^2/N \cdot m^2$.

A Equação (24.19) indica que capacitâncias extremamente altas podem ser obtidas com placas que possuem uma grande área de superfície A, e estão separadas por uma pequena distância d por um dielétrico com um grande valor de K.

CAPACITOR COM E SEM DIELÉTRICO Suponha que cada uma das placas paralelas na Figura 24.15 possua uma área igual a 2000 cm^2 ($2{,}0 \times 10^{-1}$ m^2) e que a distância entre as placas seja

igual a 1,0 cm ($1{,}0 \times 10^{-2}$ m). O capacitor está conectado a uma fonte de alimentação e é carregado até que a diferença de potencial atinja um valor $V_0 = 3000$ V = 3,0 kV. A seguir, ele é desconectado da fonte de alimentação e uma camada de um material plástico isolante é inserida entre as placas do capacitor, preenchendo completamente o espaço entre elas. Verificamos que a diferença potencial diminui para 1000 V, enquanto a carga de cada capacitor permanece constante. Calcule (a) a capacitância original C_0; (b) o módulo da carga Q de cada placa; (c) a capacitância C depois de inserido o dielétrico; (d) a constante dielétrica K do dielétrico; (e) a permissividade ϵ do dielétrico; (f) o módulo da carga induzida Q_i em cada face do dielétrico; (g) o campo elétrico original E_0 entre as placas; e (h) o campo elétrico E depois que o dielétrico é inserido.

este problema utiliza a maioria das relações apresentadas para capacitores e dielétricos.

(a) Na existência de vácuo entre as placas, usamos a Equação (24.19) com $K = 1$:

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{A}{d} = (8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}) \frac{2{,}0 \times 10^{-1}\ \mathrm{m}^2}{1{,}0 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}}$$
$$= 1{,}77 \times 10^{-10}\ \mathrm{F} = 177\ \mathrm{pF}$$

(b) Usando a definição de capacitância, dada pela Equação (24.1),

$$Q = C_0 V_0 = (1{,}77 \times 10^{-10}\ \mathrm{F})(3{,}0 \times 10^{3}\ \mathrm{V})$$
$$= 5{,}31 \times 10^{-7}\ \mathrm{C} = 0{,}531\ \mu\mathrm{C}$$

(c) Quando os dielétricos são inseridos, a carga permanece a mesma, mas o potencial diminui para $V = 1000$ V. Logo, de acordo com a Equação (24.1), a nova capacitância é

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{5{,}31 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}}{1{,}0 \times 10^{3}\,\mathrm{V}} = 5{,}31 \times 10^{-10}\,\mathrm{F} = 531\ \mathrm{pF}$$

(d) Pela Equação (24.12), a constante do dielétrico é

$$K = \frac{C}{C_0} = \frac{5{,}31 \times 10^{-10}\,\mathrm{F}}{1{,}77 \times 10^{-10}\,\mathrm{F}} = \frac{531\ \mathrm{pF}}{177\ \mathrm{pF}} = 3{,}0$$

Alternativamente, pela Equação (24.13)

$$K = \frac{V_0}{V} = \frac{3000\ \mathrm{V}}{1000\ \mathrm{V}} = 3{,}0$$

(e) Usando o resultado obtido para K do item (d) na Equação (24.17), a permissividade é

$$\begin{aligned}\epsilon = K\epsilon_0 &= (3{,}0)\,(8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N \cdot m^2}) \\ &= 2{,}66 \times 10^{-11}\,\mathrm{C^2/N \cdot m^2}\end{aligned}$$

(f) Multiplicando a Equação (24.15) pela área de cada placa, obtemos a carga induzida $Q_i = \sigma_i A$ em termos da carga $Q = \sigma A$ sobre cada placa:

$$\begin{aligned}Q_i &= Q\left(1 - \frac{1}{K}\right) = (5{,}31 \times 10^{-7}\,\mathrm{C})\left(1 - \frac{1}{3{,}0}\right) \\ &= 3{,}54 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}\end{aligned}$$

(g) Como o campo elétrico entre as placas é uniforme, seu módulo é a diferença de potencial dividida pela separação entre as placas:

$$E_0 = \frac{V_0}{d} = \frac{3000\ \mathrm{V}}{1{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 3{,}0 \times 10^{5}\,\mathrm{V/m}$$

(h) Inserindo-se a nova diferença de potencial após o dielétrico,

$$E = \frac{V}{d} = \frac{1000\ \mathrm{V}}{1{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 1{,}0 \times 10^{5}\,\mathrm{V/m}$$

ou, pela Equação (24.17),

$$\begin{aligned}E &= \frac{\sigma}{\epsilon} = \frac{Q}{\epsilon A} = \frac{5{,}31 \times 10^{-7}\,\mathrm{C}}{(2{,}66 \times 10^{-11}\,\mathrm{C^2/N \cdot m^2})\,(2{,}0 \times 10^{-1}\,\mathrm{m^2})} \\ &= 1{,}0 \times 10^{5}\,\mathrm{V/m}\end{aligned}$$

ou, Equação (24.15),

$$E = \frac{\sigma - \sigma_i}{\epsilon_0} = \frac{Q - Q_i}{\epsilon_0 A}$$

$$= \frac{(5{,}31 - 3{,}54) \times 10^{-7}\,\mathrm{C}}{(8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C^2/N \cdot m^2})(2{,}0 \times 10^{-1}\,\mathrm{m^2})}$$

$$= 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{V/m}$$

ou, pela Equação (24.14),

$$E = \frac{E_0}{K} = \frac{3{,}0 \times 10^5\,\mathrm{V/m}}{3{,}0} = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{V/m}$$

Nossos resultados indicam que a inserção do dielétrico aumentou a capacitância por um fator de $K = 3{,}0$ e reduziu o campo elétrico entre as placas por um fator de $1/K = 1/3{,}0$. Isso ocorreu em decorrência do desenvolvimento de cargas induzidas nas faces do dielétrico de módulo $Q(1 - 1/K) = Q(1 - 1/3{,}0) = 0{,}667Q$.

ARMAZENAMENTO DE ENERGIA COM E SEM DIELÉTRICO

Calcule a energia total acumulada no campo elétrico do capacitor e a densidade de energia, antes e depois de o dielétrico ser inserido.

neste problema, devemos estender a análise de modo a incluir os conceitos de energia armazenada em um capacitor e a energia do campo elétrico.

usamos a Equação (24.9) para determinar a energia armazenada antes e depois da inserção do dielétrico, e a Equação (24.20) para obter a densidade de energia.

seja U_0 a energia original e U a energia com o dielétrico. Pela Equação (24.9),

$$U_0 = \frac{1}{2}C_0V_0^2 = \frac{1}{2}(1{,}77 \times 10^{-10}\ \text{F})(3000\ \text{V})^2 = 7{,}97 \times 10^{-4}\ \text{J}$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(5{,}31 \times 10^{-10}\ \text{F})(1000\ \text{V})^2 = 2{,}66 \times 10^{-4}\ \text{J}$$

A energia final é igual a um terço da energia inicial.

A densidade de energia inicial é dada pela Equação (24.20) com $K = 1$:

$$u_0 = \frac{1}{2}\epsilon_0E_0^2 = \frac{1}{2}(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(3{,}0 \times 10^5\ \text{N/C})^2$$
$$= 0{,}398\ \text{J/m}^3$$

Com o dielétrico,

$$u = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}(2{,}66 \times 10^{-11}\ \text{C}^2/\text{N}\cdot\text{m}^2)(1{,}0 \times 10^5\ \text{N/C})^2$$
$$= 0{,}133\ \text{J/m}^3$$

A densidade de energia com o dielétrico é igual a um terço da densidade de energia original.

podemos conferir o resultado obtido para u_0 observando que o volume entre as placas é $V = (0{,}200\ \text{m})^2\ (0{,}0100\ \text{m}) = 0{,}00200\ \text{m}^3$. Como o campo elétrico é uniforme entre as placas, u_0 é uniforme também e a densidade de energia é simplesmente a energia armazenada dividida pelo volume:

$$u_0 = \frac{U_0}{V} = \frac{7{,}97 \times 10^{-4}\ \text{J}}{0{,}00200\ \text{m}^3} = 0{,}398\ \text{J/m}^3$$

o que está de acordo com a resposta obtida anteriormente. Você deve usar o mesmo método para verificar o valor obtido para U, a densidade de energia com o dielétrico.

Quando um dielétrico é inserido entre as placas de um capacitor enquanto a carga de cada placa permanece constante, a permissividade cresce de um fator K (a constante dielétrica), o campo elétrico diminui de $1/K$ e a densidade de energia $u = \frac{1}{2}\epsilon E^2$ diminui de um fator $1/K$. Para onde foi a energia? A resposta está no campo nas bordas de um capacitor real com placas paralelas. Como mostra a Figura 24.16, o campo exerce uma força que atrai o dielétrico, tendendo a puxar o dielétrico para o interior das placas do capacitor e realizando trabalho sobre o dielétrico à medida que ele se desloca.

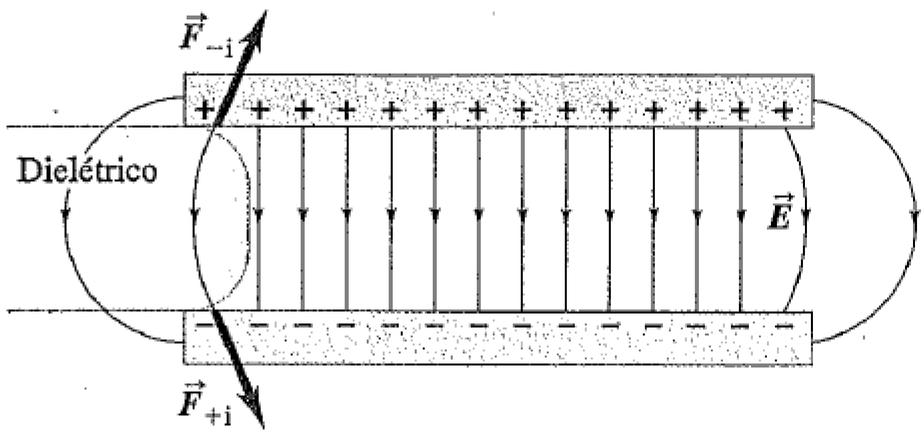

Figura 24.16 A deformação do campo elétrico nas bordas do capacitor produz forças $\vec{F}_{-i}$ e $\vec{F}_{+i}$ sobre as cargas induzidas negativa e positiva na superfície de um dielétrico, atraindo o dielétrico para o capacitor.

*24.6 Lei de Gauss em dielétricos

Podemos estender a análise da Seção 24.4 para reformular a lei de Gauss, de modo que ela seja particularmente útil para dielétricos. No alto da Figura 24.23, vemos uma ampliação da placa esquerda do capacitor e da superfície esquerda do dielétrico indicado na Figura 24.15b. Vamos aplicar a lei de Gauss usando a caixa retangular indicada na Figura 24.15b; A indica a área da superfície do lado direito e do lado esquerdo da caixa. O lado esquerdo está imerso no condutor que constitui a placa esquerda do capacitor e, portanto, o campo elétrico em todas as partes dessa superfície é igual a zero. O lado direito está imerso no dielétrico no qual o campo elétrico possui módulo E, e notamos que $E_{\perp} = 0$ em todas as partes das quatro faces restantes da caixa. A carga total no interior da caixa, incluindo as cargas da placa e as cargas induzidas sobre a superfície do dielétrico, é dada por $Q_{\text{inte}} = (\sigma - \sigma_i)$, de modo que a lei de Gauss fornece

$$EA = \frac{(\sigma - \sigma_i)A}{\epsilon_0} \qquad (24.21)$$

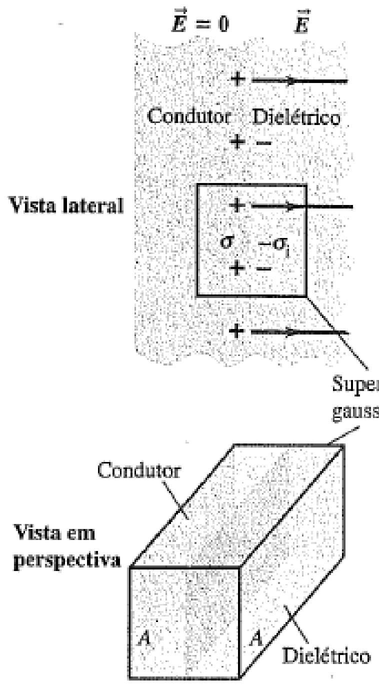

Figura 24.23 A lei de Gauss na presença de um dielétrico. Esta figura mostra uma ampliação da placa esquerda do capacitor indicado na Figura 24.15b. A superfície gaussiana é uma caixa retangular que fica metade no condutor e metade no dielétrico.

Essa equação escrita assim não esclarece muito, porque contém duas grandezas incógnitas: E no interior do dielétrico e a densidade de carga superficial induzida σ_i. Mas agora podemos usar a Equação (24.16), desenvolvida para essa mesma situação, a fim de simplificar a equação, eliminando σ_i. A Equação (24.16) fornece

$$\sigma_i = \sigma\left(1 - \frac{1}{K}\right) \quad \text{ou} \quad \sigma - \sigma_i = \frac{\sigma}{K}$$

Combinando essa relação à Equação (24.21), encontramos

$$EA = \frac{\sigma A}{K\epsilon_0} \quad \text{ou} \quad KEA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \tag{24.22}$$

A Equação (24.22) mostra que o fluxo de $K\vec{E}$ e não o fluxo de $\vec{E}$, através da superfície gaussiana, na Figura 24.23, é igual à carga *livre* no interior da superfície σA dividida por ϵ_0. Verifica-se que, para *qualquer* superfície gaussiana, desde que a carga induzida seja proporcional ao campo elétrico no material, é possível reescrever a lei de Gauss na forma

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{inte-livre}}}{\epsilon_0} \tag{24.23}$$

(lei de Gauss em um dielétrico)

em que $Q_{\text{inte-livre}}$ é a carga *livre* (ou seja, a carga não-ligada) existente no interior da superfície gaussiana. A vantagem desse resultado é que o lado direito contém somente a carga *livre* sobre o condutor e não a carga ligada (induzida). De fato, embora não tenhamos demonstrado, a Equação (24.23) permanece válida mesmo quando diferentes partes da superfície gaussiana estão imersas em dielétricos com diferentes valores de K, desde que o valor de K em cada dielétrico seja independente do campo elétrico (que é usualmente o caso quando os campos elétricos não são muito fortes) e que adotemos o valor apropriado de K para cada ponto da superfície gaussiana.

CAPACITOR ESFÉRICO COM DIELÉTRICO No capacitor esférico o volume entre as cascas esféricas concêntricas está cheio de um óleo isolante com uma constante dielétrica K. Use a lei de Gauss para calcular a capacitância.

usaremos uma superfície gaussiana esférica de raio r entre as duas esferas. Como um dielétrico está presente, aplicaremos a lei de Gauss na forma da Equação (24.23).

a simetria esférica do problema não se altera pela presença do dielétrico, de modo que temos

$$\oint K\vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint KE\, dA = KE \oint dA = (KE)\,(4\pi r^2) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi K\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$$

em que $\epsilon = K\epsilon_0$ é a permissividade do dielétrico

Em comparação ao caso no qual existe vácuo entre as placas condutoras esféricas, o campo elétrico se reduz de um fator $1/K$. A diferença de potencial V_{ab} entre as cascas esféricas se reduz também de um fator $1/K$ e, portanto, a capacitância $C = Q/V_{ab}$ *aumenta* de um fator igual a K, tal como no caso de um capacitor com placas paralelas quando inserimos um dielétrico. Usando o resultado para o caso no qual existe vácuo
verificamos que a capacitância com o dielétrico é dada por

$$C = \frac{4\pi K\epsilon_0 r_a r_b}{r_b - r_a} = \frac{4\pi\epsilon r_a r_b}{r_b - r_a}$$

neste caso, o dielétrico preenche por completo o volume entre os dois condutores, portanto a capacitância é apenas K vezes o valor sem a presença do dielétrico.