Grafos: Busca em Largura

SCC0216 Modelagem Computacional em Grafos

Thiago A. S. Pardo
Maria Cristina F. Oliveira

Percorrendo um grafo

- Percorrer um grafo é um problema fundamental
- Deve-se ter uma forma sistemática de visitar as arestas e os vértices: objetivo é \`processar´ todos os vértices
- O algoritmo deve ser suficientemente flexível para se adequar à diversidade de grafos

Percorrendo um grafo

- Eficiência
  - Não deve haver repetições (desnecessárias) de visitas a um vértice e/ou aresta

Percorrendo um grafo

- Correção
  - Todos os vértices devem ser visitados e processados

Percorrendo um grafo

- Solução
  - Há duas possibilidades
    - Busca em largura
    - Busca em profundidade
  - Marcar os vertices:
    - Ainda não visitados, já visitados, processados
    - Estrutura de dados de apoio para 'registrar' os vértices que ainda falta visitor (e processar)

Percorrendo um grafo

- Solução
  - Há duas possibilidades
    - **Busca em largura (usando uma fila)**
    - Busca em profundidade (usando uma pilha)

BFS (Busca em Largura)

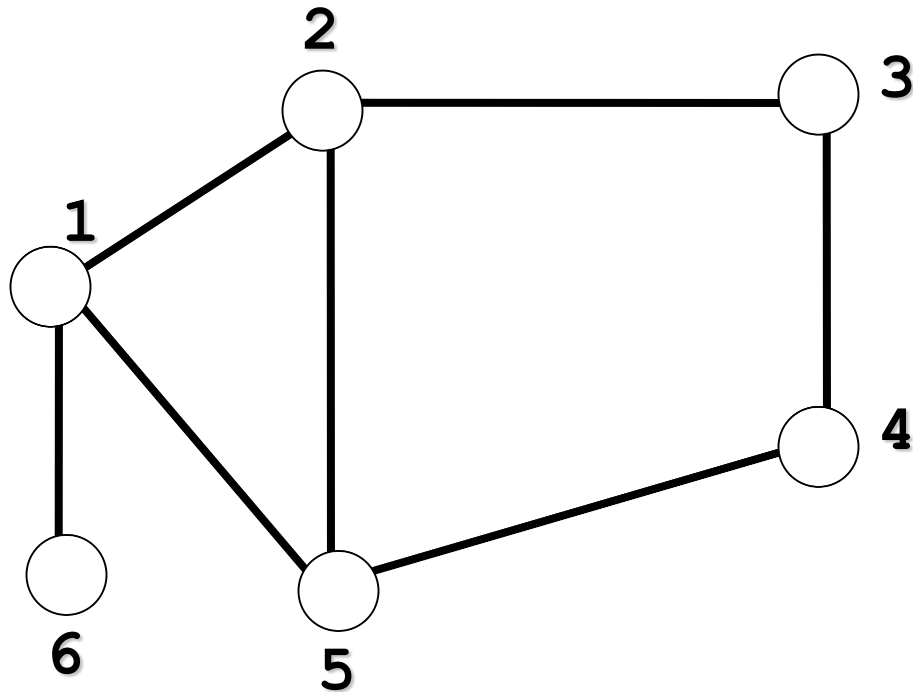
- BFS – *Breadth-First Search*
  - Também chamada de busca em “amplitude”
  - Começa *visitando* um vértice arbitrário *v*
    - Em seguida, todos os nós a uma distância *k* dele são *visitados* antes de visitar os vértices a uma distância *k+1*
  - Ao final, \`descobre´ todos os vértices alcançáveis a partir de *v*

BFS (Busca em Largura)

- BFS – *Breadth-First Search*
  - É comum utilizar uma codificação de cores para identificar os vértices:
    - ainda não visitados (branco),
    - já visitados (cinza), e
    - completamente processados (preto)

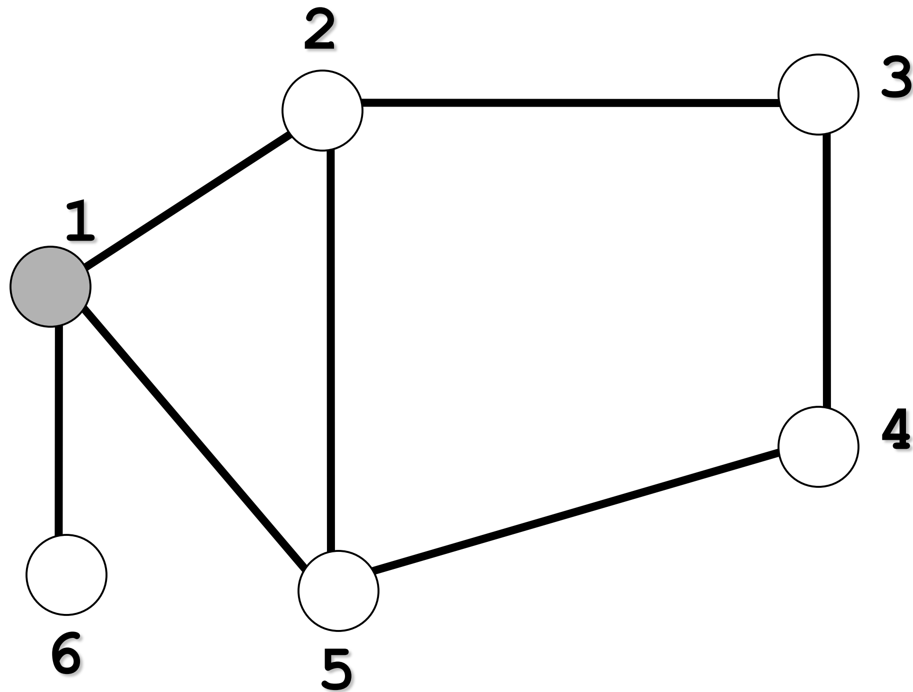
BFS – exemplo

Percorrendo um Grafo: BFS



BFS – exemplo

Percorrendo um Grafo: BFS

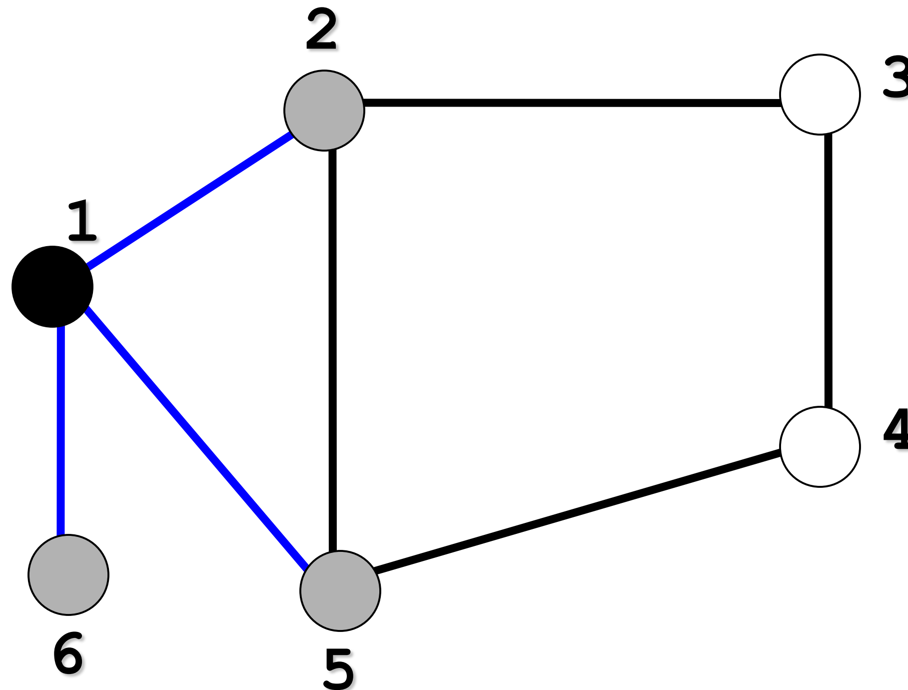


Nó inicial: 1

BFS – exemplo

Percorrendo um Grafo: BFS

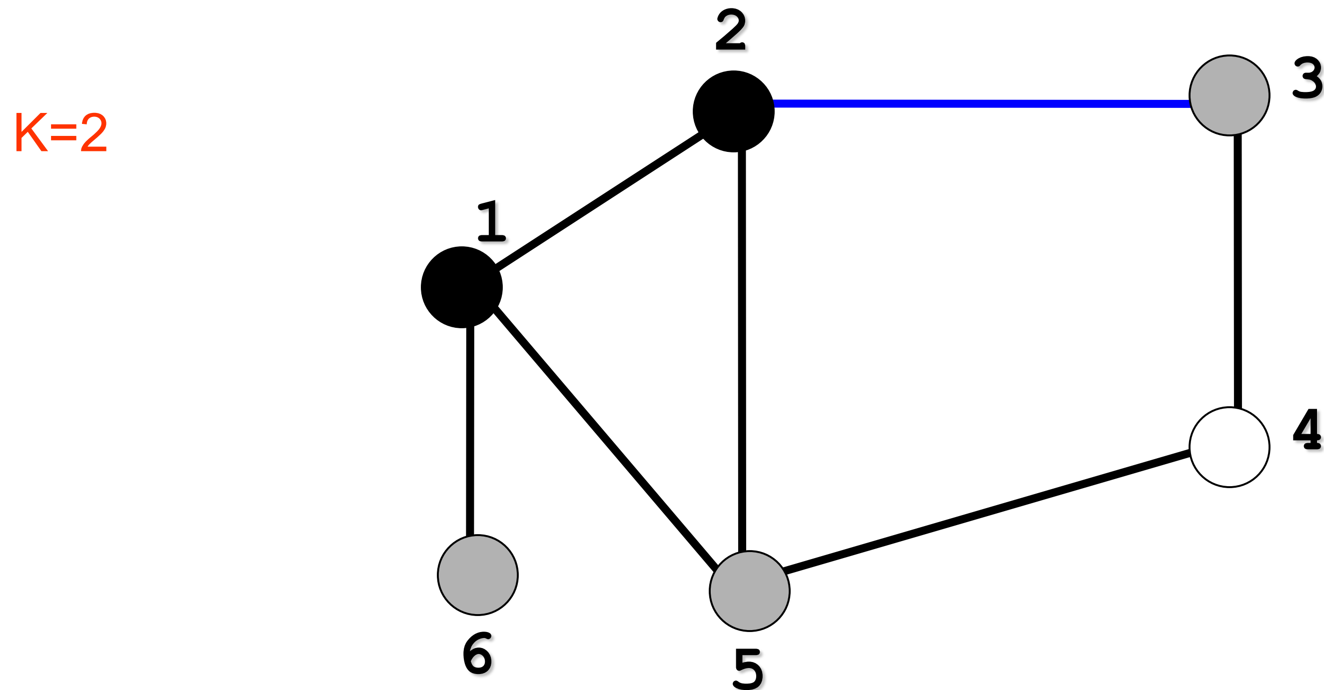
K=1



Visita (e marca) todos os nós não visitados adjacentes a 1: 2, 5 e 6

BFS – exemplo

Percorrendo um Grafo: BFS

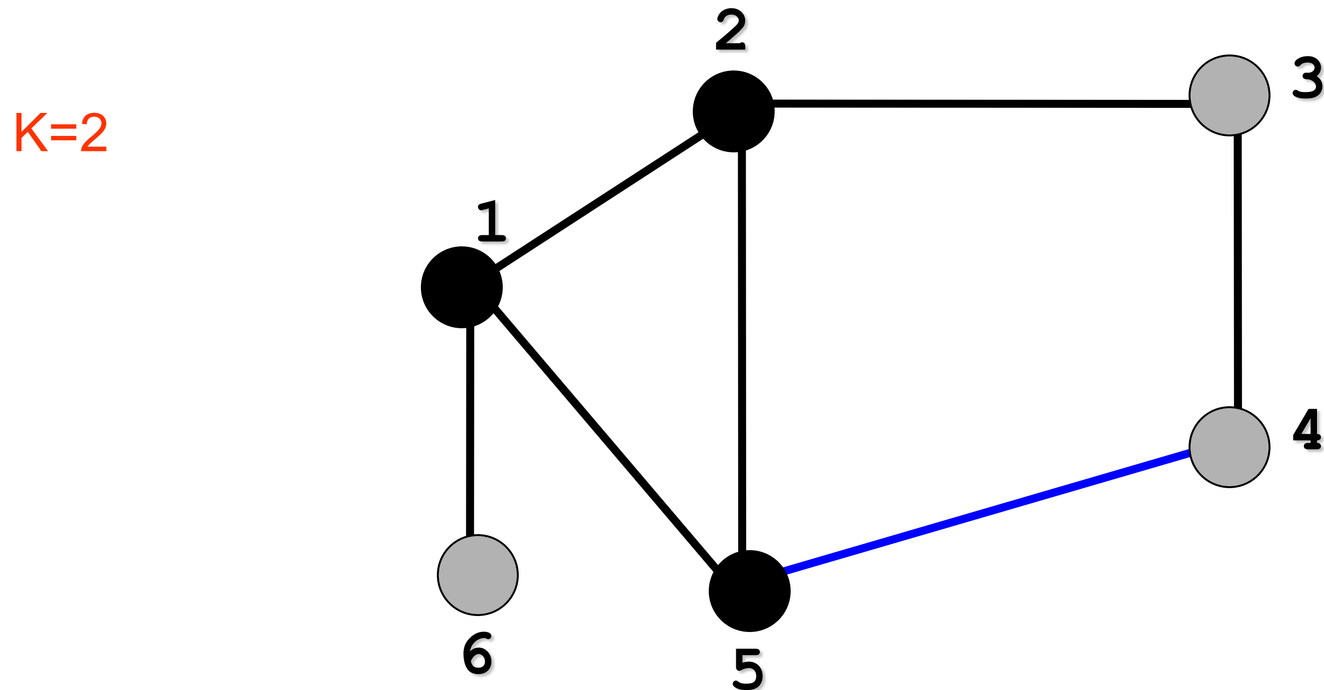


Visita (e marca) todos os nós não visitados adjacentes a 2: 3

BFS – exemplo

Percorrendo um Grafo: BFS

K=2

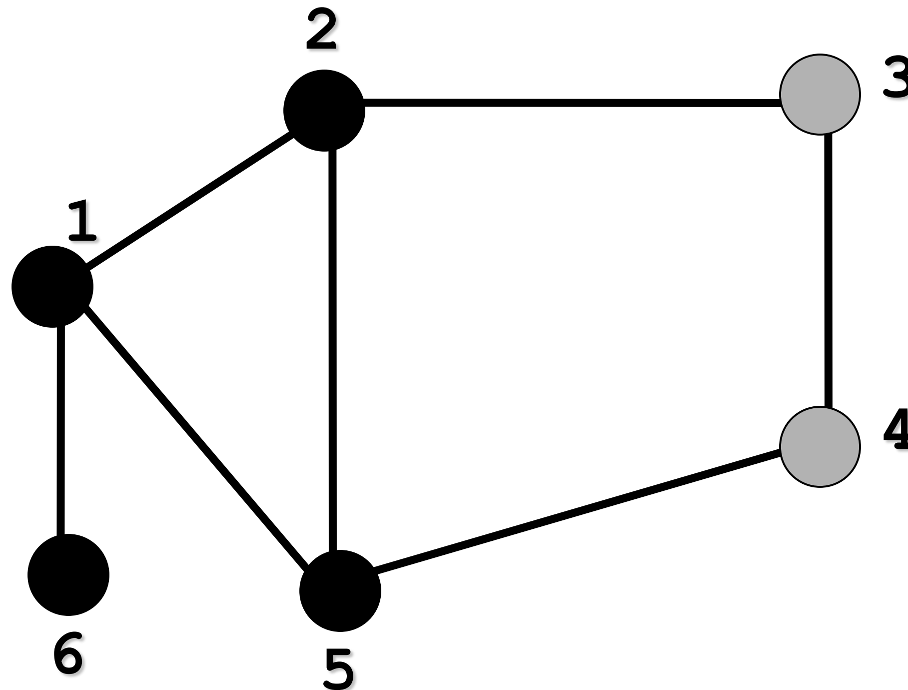


Visita (e marca) todos os nós não visitados adjacentes a 5: 4

BFS – exemplo

Percorrendo um Grafo: BFS

K=2

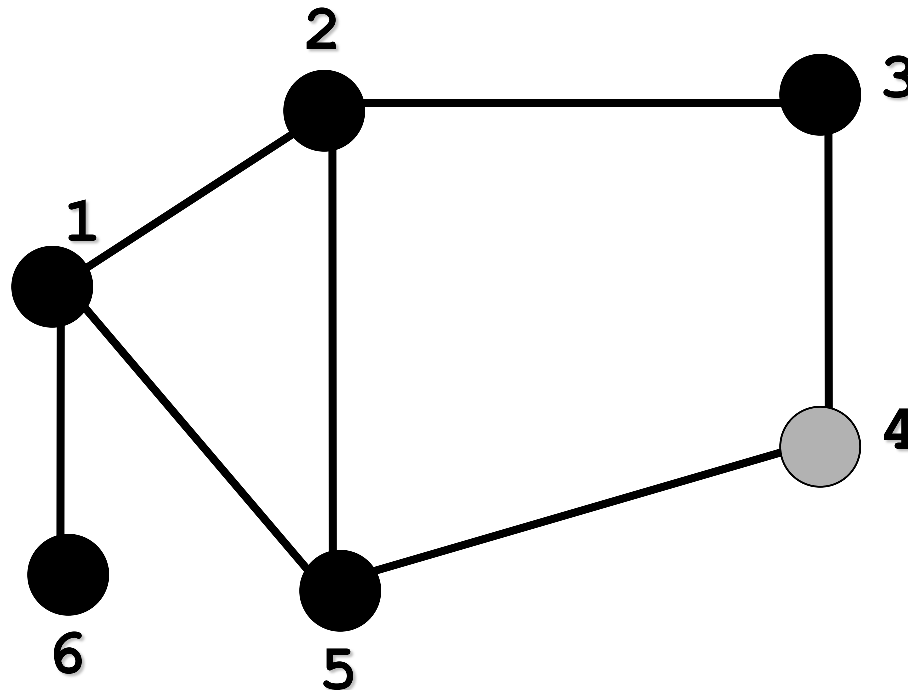


Visita (e marca) todos os nós não visitados adjacentes a 6: nenhum

BFS – exemplo

Percorrendo um Grafo: BFS

K=3

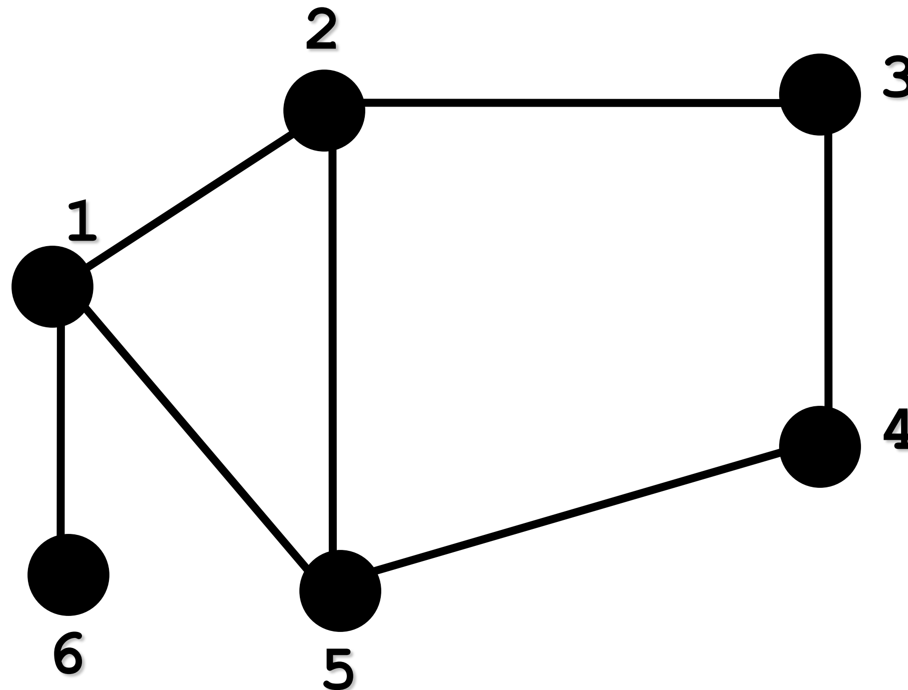


Visita (e marca) todos os nós não visitados adjacentes a 3: nenhum

BFS – exemplo

Percorrendo um Grafo: BFS

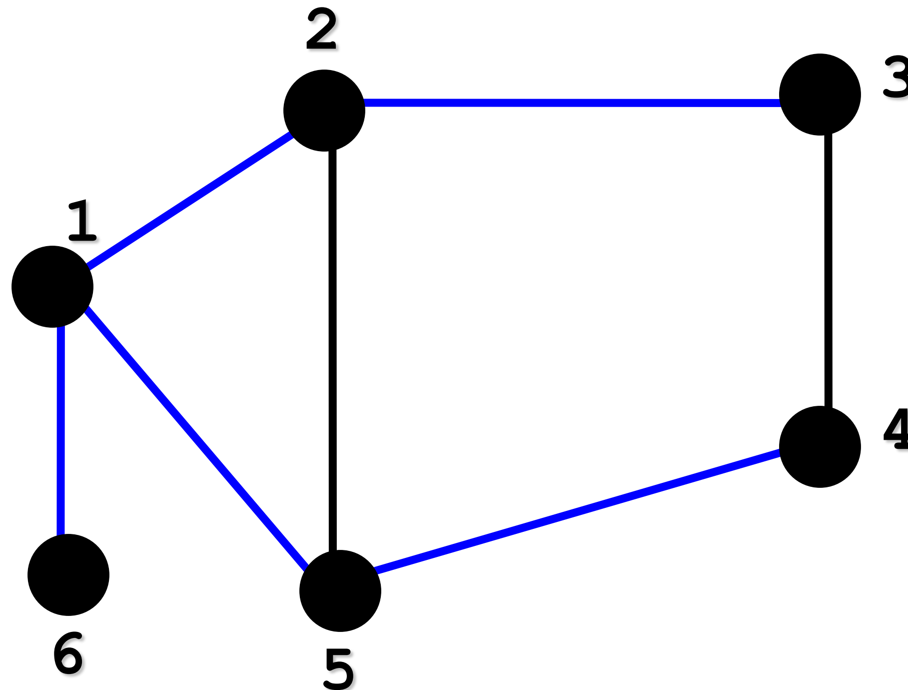
K=3



Visita (e marca) todos os nós não visitados adjacentes a 4: nenhum

BFS – exemplo

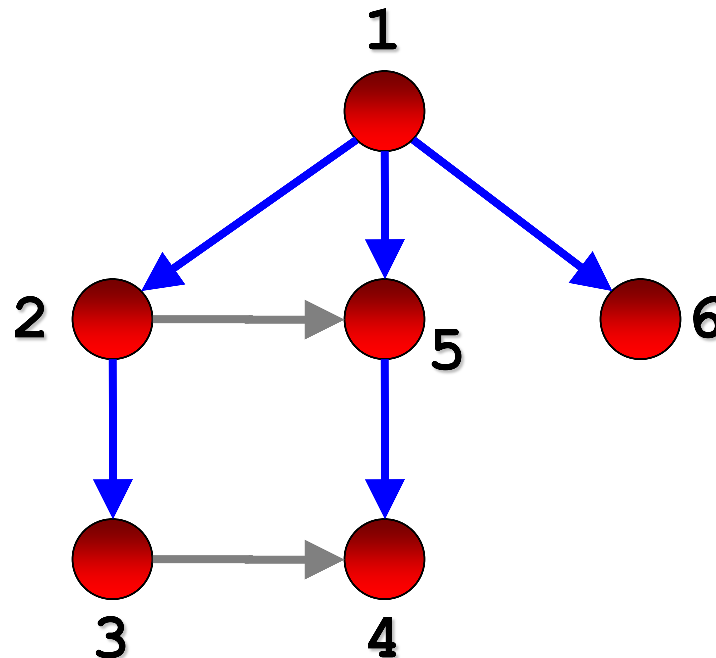
Percorrendo um Grafo: BFS



Em azul as arestas 'percorridas' no processo!

BFS – exemplo

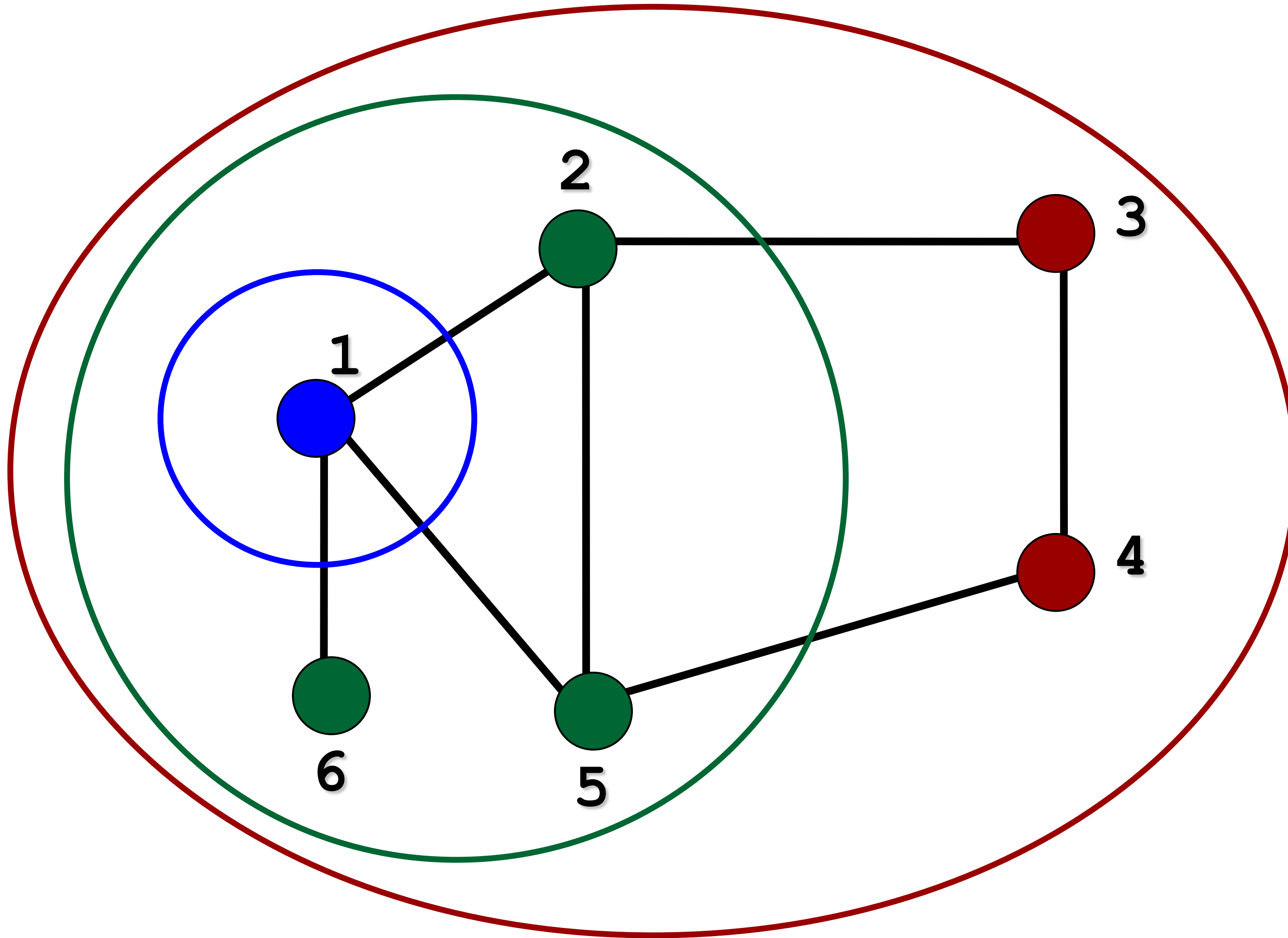
Percorrendo um Grafo: **árvore de busca em largura**



Atenção: as arestas (2,5) e (3,4) não foram percorridas!

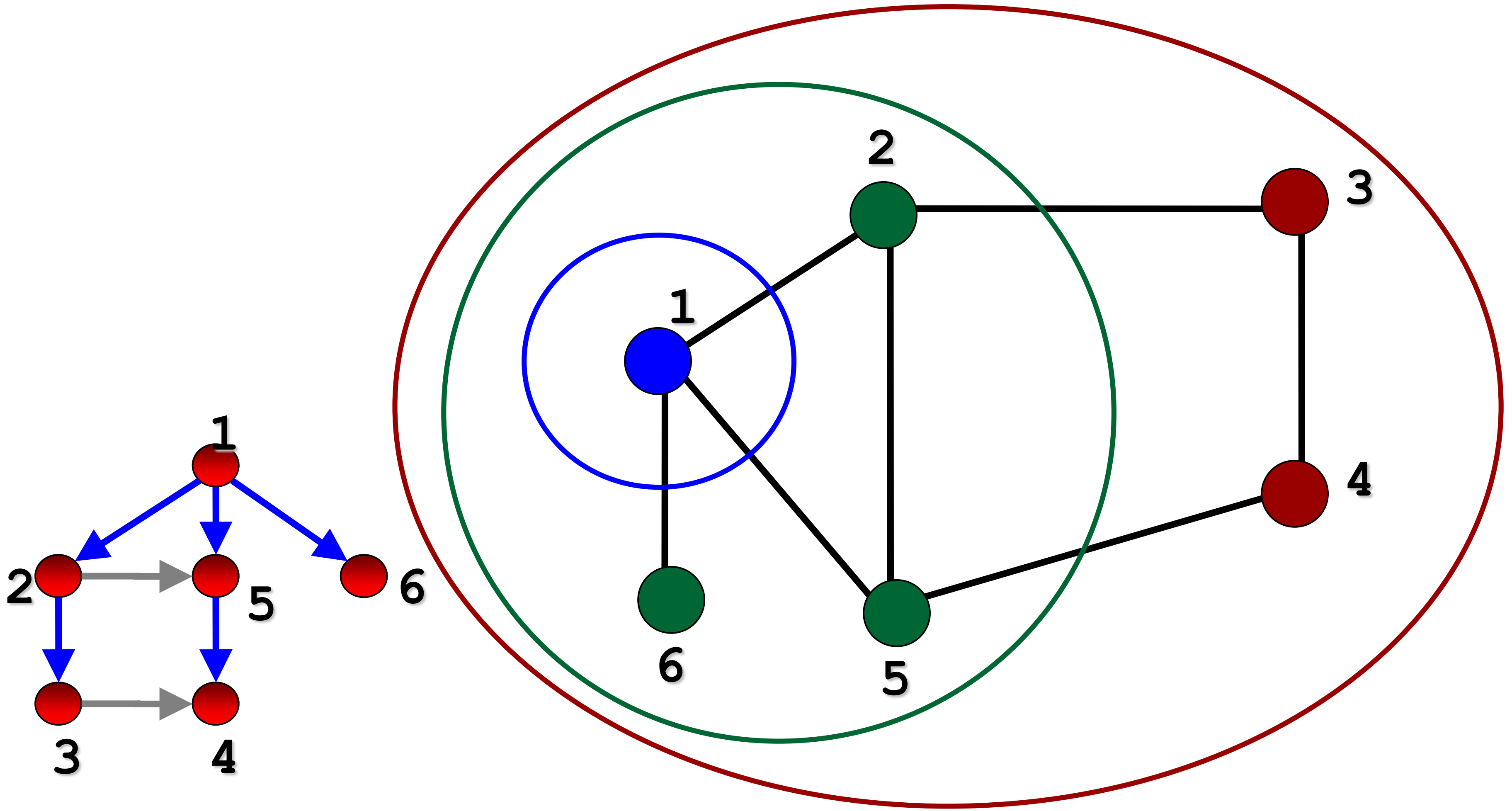
BFS – exemplo

Percorre-se o grafo como se propagasse uma onda na água!



BFS – exemplo

Percorre-se o grafo como se houvesse uma onda na água!



BFS (Busca em Largura)

- BFS – *Breadth-First Search*
  - Todos os vértices são inicializados como brancos
  - Quando um vértice *v* é 'descoberto' pela primeira vez, ele se torna cinza (visitado)
  - Quando todos os vértices adjacentes a *v* são descobertos, *v* torna-se preto (processado)

```
1  procedure BFS(G, start_v)
2      Seja Q uma queue
3      rotule start_v como cinza, dist = -1
4      Q.enqueue(start_v)
5      while Q não está vazia do
6          v := Q.dequeue(), dist = dist + 1
7          rotule v com preto
8          print(v, dist)
9          for all arestas (v, w) in G.adjacentEdges(v) do
10             if w não está rotulado como cinza then
11                 rotule w como cinza
12                 Q.enqueue(w)
```

Input: Um grafo *G,* um vértice inicial *start_v*, todos os vertices rotulados como *branco*

Output: A sequencia de vertices rotulados como *preto* (processados na ordem da visita BFS)

BFS (Busca em Largura)

- BFS – *Breadth-First Search*
  - Também é comum a implementação armazenar a distância de cada vértice em relação ao vértice no qual se iniciou a busca
    - Útil em aplicações que precisam calcular o **caminho mais curto a partir de um vértice**

BFS (Busca em Largura)

- Algoritmo
  - Usa uma fila para organizar quais vértices precisam ser visitados

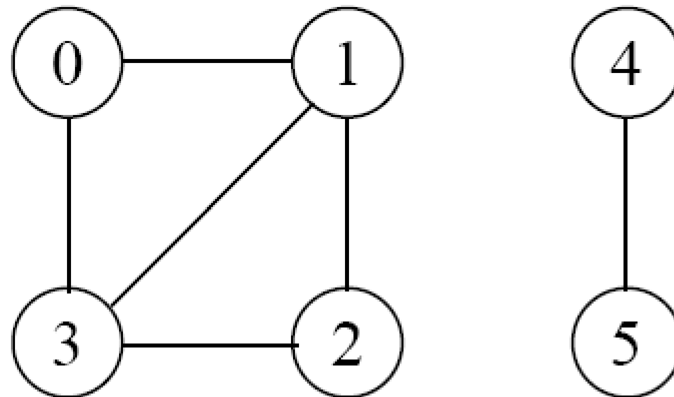
    1. A fila começa com o vértice inicial
    2. O primeiro vértice da fila é recuperado e processado, e seus vértices adjacentes são inseridos no fim da fila
    3. Se fila vazia, processo é encerrado; senão, retorna ao passo 2

BFS (Busca em Largura)

- Algoritmo
  - Ou seja: a fila, por si só, **garante** que os vértices a uma distância *k* de um vértice *v* sejam processados antes dos vértices a uma distância *k+1* de *v*

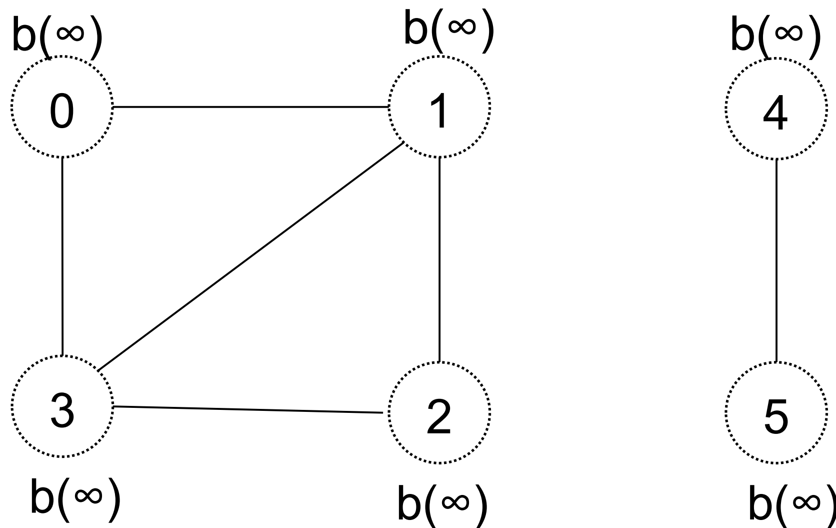
BFS (Busca em Largura)

- Exemplo detalhado
  - Armazenar estados dos vértices e distância ao vértice inicial
  - Estrutura de dados auxiliar: fila



BFS – passo 0

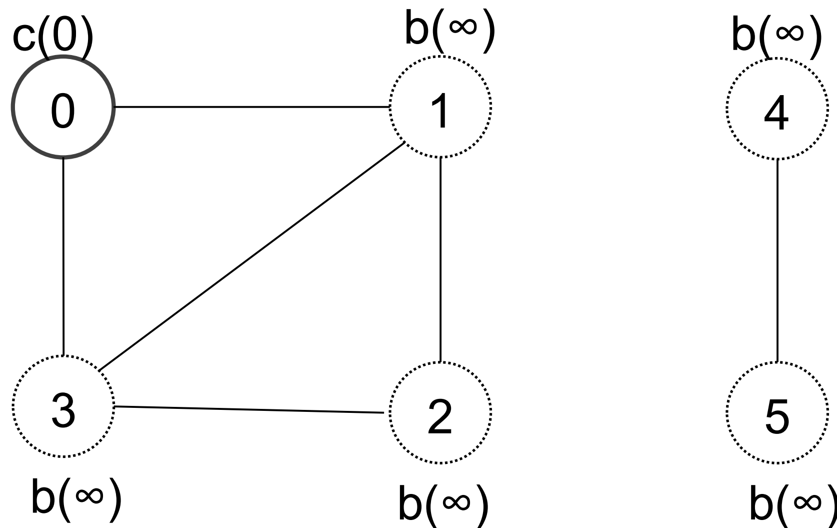
- Vértice inicial: ?; Fila = Vazia



b = branco, c = cinza, p = preto,
distância do vértice inicial entre parênteses

BFS – passo 1

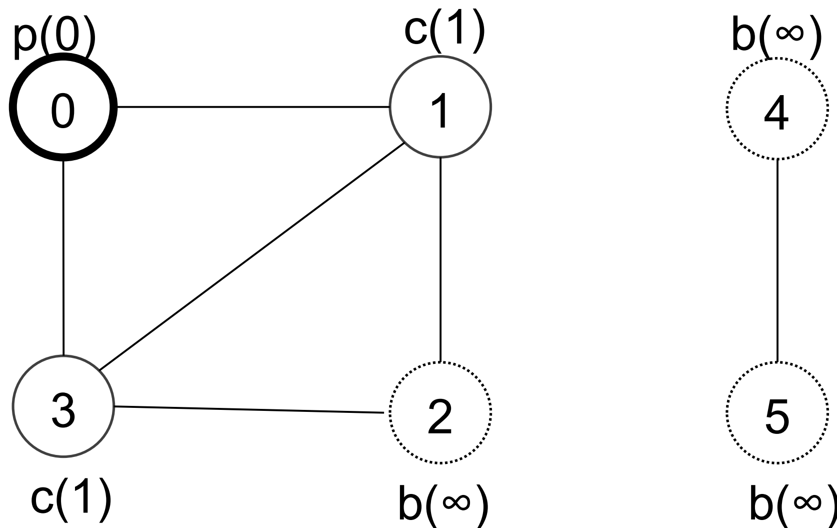
- Vértice inicial: 0; distância = 0, Fila = 0



b = branco, c = cinza, p = preto,
distância ao vértice inicial entre parênteses

BFS – passo 2

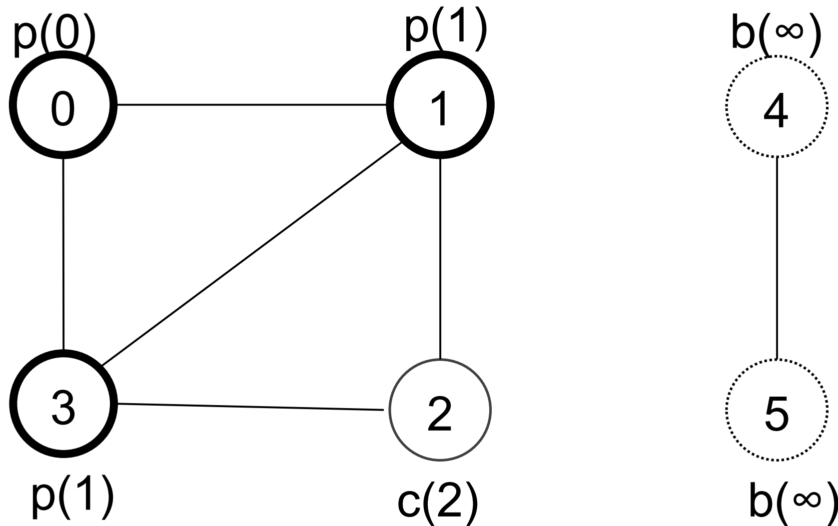
- Vértice inicial: 0; distância = 1, Fila = 1,3



Tiro da fila o vértice 0, insiro na fila seus adjacentes ainda brancos 1 e 3 (ficam cinza)

BFS – passo 2

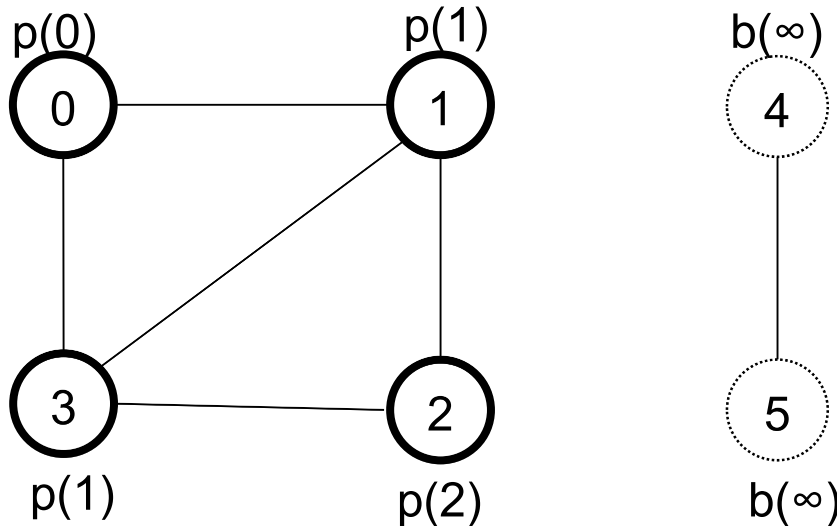
- Vértice inicial: 0; distância = 2, Fila = 2



Tiro da fila o vértice 1, insiro na fila seus adjacentes ainda brancos, tiro da fila o vértice 3, insiro na fila os seus adjacentes ainda brancos

BFS – passo 3

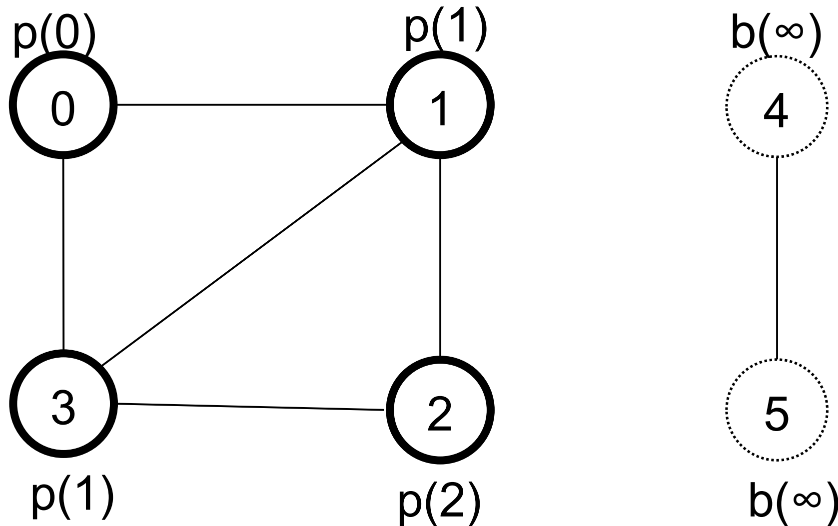
- Vértice inicial: 0; distância = 2, Fila = Vazia



Tiro da fila o vértice 2, insiro na fila seus adjacentes ainda brancos (nenhum!)

BFS – passo 4

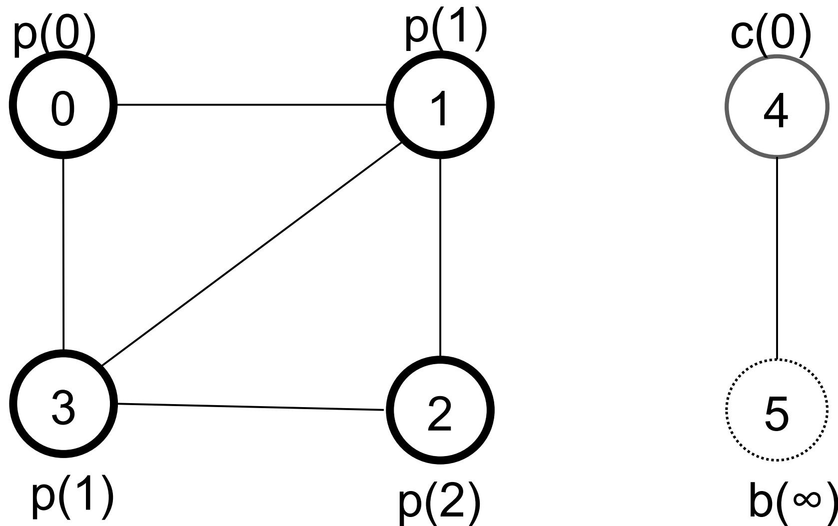
- Vértice inicial: ?; distância = 0, Fila = Vazia



Ainda tem vértices brancos, recomeço partindo de um deles...

BFS – passo 5

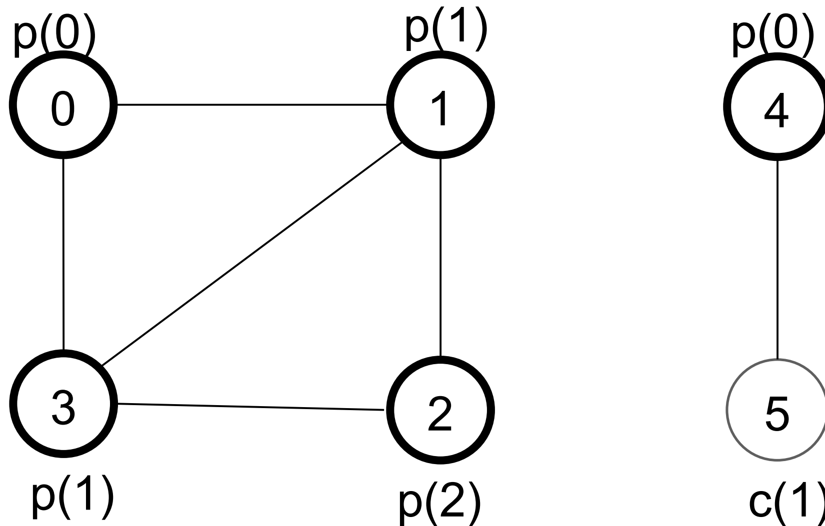
- Vértice inicial: 4; distância = 0, Fila = 4



Insiro na fila o vértice 4, fica cinza

BFS – passo 6

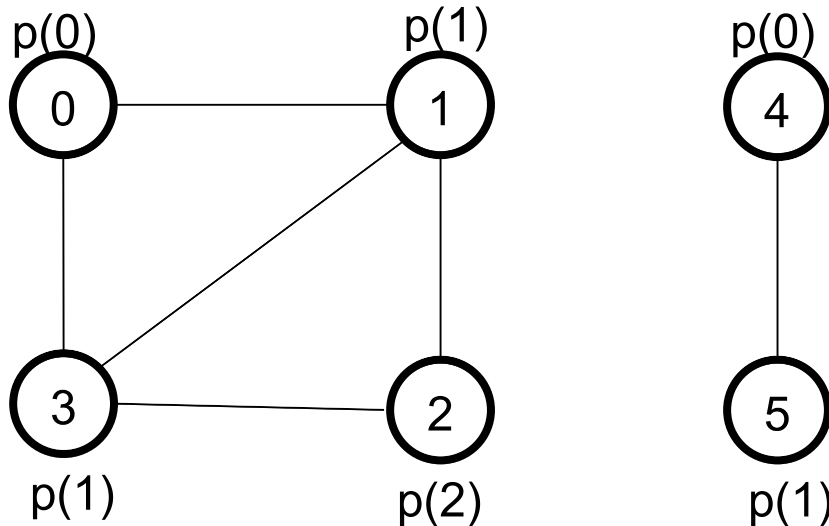
- Vértice inicial: 4; distância = 1, Fila = 5



Tiro da fila o vértice 4, insiro na fila seus adjacentes ainda brancos

BFS – passo 7

- Vértice inicial: 4; distância = 1, Fila = Vazia

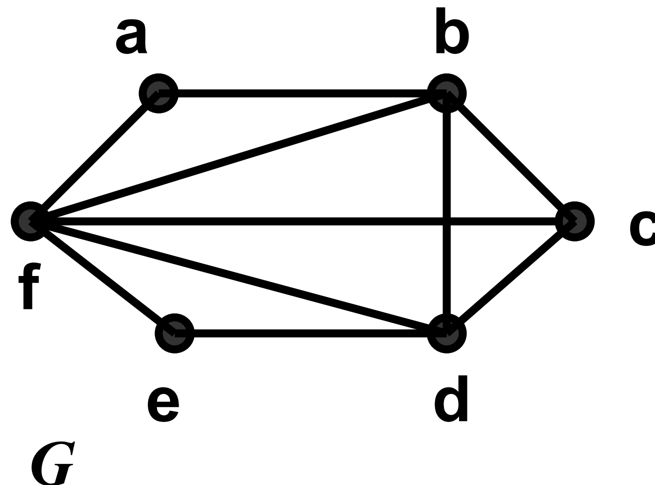


Tiro da fila o vértice 5, insiro na fila seus adjacentes ainda brancos (nenhum!)
Todos os vértices pretos, busca encerrada

PRÁTICA

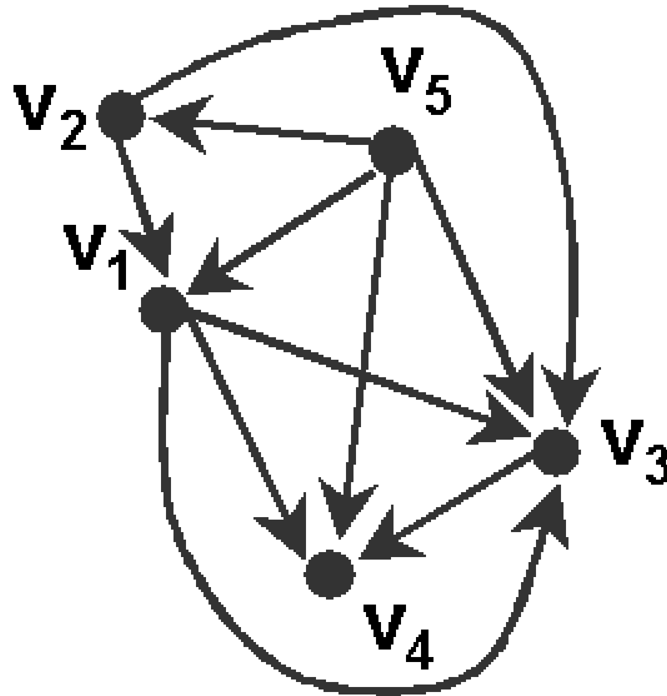
BFS (Busca em Largura)

- Exercício: faça a busca em largura no grafo abaixo



BFS (Busca em Largura)

- Exercício: faça a busca em largura no grafo abaixo



```
1  procedure BFS(G, start_v)
2      Seja Q uma queue
3      rotule start_v como cinza, dist = -1
4      Q.enqueue(start_v)
5      while Q não está vazia do
6          v := Q.dequeue(), dist = dist + 1
7          rotule v com preto
8          print(v, dist)
9          for all arestas (v, w) in G.adjacentEdges(v) do
10             if w não está rotulado como cinza then
11                 rotule w como cinza
12                 Q.enqueue(w)
```

Input: Um grafo *G,* um vértice inicial *start_v*, todos os vertices rotulados como *branco*

Output: A sequência de vertices rotulados como *preto* (processados na ordem da visita BFS) e sua distância ao inicial

Complexidade do BFS

$O(|V| + |A|)$, ou seja, linear em relação ao tamanho da representação do grafo por listas de adjacências

- Todos os vértices são enfileirados/desenfileirados no máximo uma vez; o custo de cada uma dessas operações é $O(1)$, e elas são executadas $O(|V|)$ vezes

- A lista de adjacências de cada vértice é percorrida no máximo uma vez (quando o vértice sai da fila); o tempo total é $O(|A|)$ (soma dos comprimentos de todas as listas, igual ao número de arestas)

BFS (Busca em Largura)

- Implemente a busca em largura!

BFS (Busca em Largura)

- A busca em largura resulta no caminho mais curto entre o vértice inicial e um vértice qualquer do grafo!
  - O procedimento visita_bfs constrói uma árvore de busca em largura que pode ser recuperada mantendo uma variável antecessor
    - Para cada vértice, essa variável armazena o vértice antecessor no caminho percorrido até descobri-lo (visitá-lo)

BFS (Busca em Largura)

- **Exercício**
  - Implemente em C uma sub-rotina que imprima os vértices do caminho mais curto entre o vértice inicial e outro vértice qualquer do grafo
  - Faça a análise do algoritmo
    - Pode usar a busca em largura já realizada

BFS (Busca em Largura)

- **Questões**
  - *Como a busca em largura pode ajudar a determinar o número de componentes conexas de um grafo?*
  - *Como alterar sua implementação para fazer isso?*