

MAP 0217 MAT 0311 - 2023 1º Semestre - IME USP
Lista de Exercícios - Conexidade

Questão 1 Mostre exemplos em $\mathbb{R}^p$ de conjuntos conexos A e B , nenhum deles vazio, tais que:

- (i) $A \cup B$ não é conexo.
- (ii) $A \cup B$ é conexo (com $A \cap B = \emptyset$)
- (iii) $A \cap B$ não é conexo.
- (iv) $A \cap B$ é conexo (com $A \neq B$ e $A \cap B \neq \emptyset$)
- (v) $B \subset A$ e $A \setminus B$ não é conexo.
- (vi) $B \subset A$, $A \neq B$ e $A \setminus B$ é conexo.

Questão 2 Prove que se A é um subconjunto conexo do espaço métrico M então $\overline{A}$ é conexo.

Questão 3 Sejam $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ subconjuntos conexos de um espaço métrico M . Prove que:

- (i) Se $A \cap B \neq \emptyset$ então $A \cup B$ é conexo.
- (ii) Se $A \cup B$ é conexo então $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$.
- (iii) Se A e B são abertos então $A \cup B$ é conexo se, e só se, $A \cap B \neq \emptyset$.

Os demais exercícios usam a noção de *componente conexa*, definida agora.

Definição 1 Se A é um subconjunto do espaço métrico M e $x \in A$, chama-se **componente conexa de A que contém x** ao conjunto $A_x \subset A$ tal que:

- (a) $x \in A_x$.
- (b) A_x é conexo.
- (c) Se $x \in B \subset A$ e B é conexo então $B \subset A_x$.

Ou seja a A_x é o *maior* subconjunto conexo de A que contém x . Claro que A é conexo se, e só se, $A_x = A$, para todo $x \in A$.

Questão 4

- (i) Considere o subconjunto $A = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ de $\mathbb{R}^2$ e $r \in A$ calcule a componente conexa de A que contém r .
- (ii) Para $n \in \mathbb{N}$, considere $I_n = \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1} \right]$ e seja $A = (\cup_{n=1}^{\infty} I_n) \cup \{0\}$. Calcule A_x , para cada $x \in A$.

Questão 5 Seja A um subconjunto do espaço métrico M , prove que:

- (i) Se x e y são elementos de A então $A_x = A_y$ ou $A_x \cap A_y = \emptyset$.
- (ii) Se A é aberto então, para todo $x \in A$, tem-se que A_x é aberto.