MAP 0217 MAT 0311 - 2023 1° Semestre - IME USP
Conexidade

1 Introdução

Aqui serão vistas as propriedades gerais de conjuntos conexos em espaços métricos e como funções contínuas lidam com eles. Uma seção especial é apresentada ao final de aplicações, com destaque para $\mathbb{R}^p$. Também este é um tópico muito *topológico* da disciplina.

O material estudado é coberto nas seções 12 e 22 do livro de Bartle.

O material apresentado aqui tem uma abordagem um pouco diferente da do texto por enfatizar a relação muito grande que existe entre conjuntos conexos e conjuntos em que funções contínuas obedecem a *um certo teorema do valor intermediário* (veja o fato 3, o item (iii) do fato 5 e a discussão que segue o fato 6).

Dessa maneira o leitor pode ter duas visões de conexidade e das técnicas básicas que envolvem este tema tão importante.

2 Espaços Conexos

2.1 Diálogo instrutivo... ou não?

Um aluno - *Professor, não entendi direito esse negócio de conexo, pode mostrar um exemplo de algo que não é conexo?*
O professor - *Claro!* E ao dizer isso, o mestre vai à lousa e desenha duas elipses bem distantes uma da outra, aponta para o desenho e completa... *Aqui está, UM conjunto que não é conexo.*
O mesmo aluno - *Isso não vale, o exemplo que eu pedi era de UM conjunto que não fosse conexo, isso aí são DOIS conjuntos!*

Pois é...

2.2 Definições básicas

Nesta nota (M, d) e $(N, \widetilde{d})$ serão espaços métricos que serão nomeados apenas como M e N, fica subentendido que as métricas d e $\widetilde{d}$ estão fixas.

Definição 1 *Seja $A \subset M$, uma* **cisão** *de A é, por definição, um par (U, V) de subconjuntos abertos de M tais que:*

(i) $(A \cap U) \cap (A \cap V) = \emptyset$

(ii) $(A \cap U) \cup (A \cap V) = A$

Observação 1 Se $A = M$ então $A \cap U = U$ e $A \cap V = V$, assim uma **cisão de um espaço métrico** é um par de (U, V) de subconjuntos *abertos disjuntos* desse espaço cuja reunião é o espaço todo.

Observação 2 Claro que, para todo subconjunto A de M, o par (U, V) em que $U = M$ e $V = \emptyset$ é uma cisão de A, nesse caso $A \cap U = A$ e $A \cap V = \emptyset$. Uma cisão desse tipo, em que um dos conjuntos $A \cap U$ ou $A \cap V$ é vazio (e o utro é A) é chamada **cisão trivial**.

Exemplo 1 Considere o espaço métrico $\mathbb{Q}$ dos números racionais com a distância usual, $d(x, y) = |x - y$.

Se $U = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 > 2\}$ e $V = \{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\} = \mathbb{Q} \backslash U$ então (U, V) é uma cisão não trivial de $\mathbb{Q}$.

Para ver isto, note que U e V são conjuntos abertos em $\mathbb{Q}$ e use a observação 1.

Exercício 1 *Mostre que no exemplo anterior U e V são de fato abertos em $\mathbb{Q}$.*

Note que no exemplo visto, como U e V são abertos e $V = \mathbb{Q} \setminus U$ tem-se que U e V são também fechados. Isso é um fato geral.

Fato 1 *O par (U, V) é uma cisão do espaço métrico M se, e só se, U e V são subconjuntos de M abertos e fechados, com $V = M \setminus U$.*

Demonstração: Consequência direta da observação 1 e da definição de fechado. ∎

Uma propriedade que segue de pronto desta "trivialidade"é:

Fato 2 *Um espaço métrico M tem uma cisão não trivial se, e só se, existe um subconjunto U de M, com $\emptyset \neq U \neq M$, que é aberto e fechado em M.*

Exercício 2 *Demonstre o fato 2.*

Uma última observação simples mas útil.

Fato 3 *O espaço métrico M admite uma cisão não trivial se, e só se, existe uma função contínua $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $Im(f) = \{0, 1\}$.*

Demonstração: Admita que (U, V) é uma cisão não trivial de M.

Então, pelo fato 2, U e V são abertos disjuntos, diferentes do vazio, tais que $M = U \cup V$.

Considere então $f : M \longrightarrow N$ definida for $f(x) = 1$, se $x \in U$, e $f(x) = 0$ para todo $x \in V$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}$ um aberto, então:

- Se $\{0, 1\} \cap \Omega = \emptyset$ então $f^{-1}(\Omega) = \emptyset$.
- Se $\{0, 1\} \cap \Omega = \{0\}$ então $f^{-1}(\Omega) = U$.
- Se $\{0, 1\} \cap \Omega = \{1\}$ então $f^{-1}(\Omega) = V$.
- Se $\{0, 1\} \cap \Omega = \{0, 1\}$ então $f^{-1}(\Omega) = M$.

Como U e V são abertos, fica provado que, para todo aberto $\Omega \subset \mathbb{R}$ tem-se que $f^{-1}(\Omega)$ é um aberto de M e isso mostra de pronto a continuidade de f.

Para provar a recíproca suponha que $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $Im(f) = \{0, 1\}$.

Considere $I = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $J = (\frac{1}{2}, 2)$ e defina $U = f^{-1}(I)$ e $V = f^{-1}(J)$.

Como f é contínua e os conjuntos I e J são abertos disjuntos segue–se que U e V são subconjuntos de M també abertos disjuntos de M, com $U \cup V = M$ pois $Im(f) \subset I \cup J$.

Além disso $U \neq \emptyset$, pois $0 \in I \cap Im(f)$, e $V \neq \emptyset$, pois $1 \in I \cap Im(f)$.

Portanto (U, V) é uma cisão não trivial de M. ∎

Um exemplo muito importante é visto na forma de proposição. No texto de Baetle é o teorema 12.3 (com uma linguagem um pouco diferente, mas é este resultado), a demonstração colocada aqui é levemente diferente, mas uma leitura atenta de ambas mostra que há um paralelo entre elas.

Fato 4 *O intervalo $I = [0, 1]$ de $\mathbb{R}$ só admite cisões triviais.*

Demonstração: Suponha por absurdo que isso não é verdade.

Note que, conforme se viu em aula anterior, com a distância habitual de $\mathbb{R}$, o intervalo real I torna-se um espaço métrico e no qual abertos são a intersecção de I com abertos de $\mathbb{R}$.

Assim, pela definição de cisão, claro que é equivalente afirmar que o subconjunto $[0, 1]$ do espaço métrico $\mathbb{R}$ tem uma cisão não trivial e dizer o espaço métrico $[0, 1]$ com a distância usual tem uma cisão não trivial.

Portanto, se existe uma cisão não trivial de $[0,1]$, o fato 3 mostra que existe uma função contínua $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja imagem é o conjunto $\{0,1\}$.

Mas, pelo teorema do valor intermediário, uma função assim não pode existir. ∎

Claro que esta demonstração mostra que *todo intervalo J de $\mathbb{R}$ só admite a cisão trivial* (seja J fechado ou não).

2.3 Conexidade em Espaços Métricos

Definição 2 *Um subconjunto A de um espaço métrico M diz-se, por definição,* **conexo** *em M se admite apenas cisões triviais.*

Se A admite uma cisão não trivial ele é chamado, por definição, **desconexo** *ou* **não conexo**.

Com esse conceito definido, é imediato ver que o fato 4 pode ser com o enunciado usual, *todo intervalo é um subconjunto conexo de* $\mathbb{R}$.

Perceba no entanto que, como se viu no exemplo 1 o conjunto dos números racionais não é conexo[1].

A discussão feita na subseção 2.2 deixa claro o seguinte resultado.

Fato 5 *Seja (M,d) um espaço métrico. São equivalentes:*

(i) *M é conexo.*

(ii) *Os únicos subconjuntos de M que são abertos e fechados em M são o conjunto vazio e M.*

(iii) *Se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então sua imagem é um intervalo.*

Demonstração:

- $(i) \Longrightarrow (ii)$: Decorre de modo imediato do fato 2.

- $(ii) \Longrightarrow (iii)$: Suponha por absurdo que vale (ii) e existe uma função contínua $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja imagem não é um intervalo.

  Então existem reais $a < b$ na imagem de f e um ponto c entre a e b que não pertence à imagem de f.

  Considere $I = (-\infty, c)$, $J = (c, +\infty)$ e defina $U = f^{-1}(I)$ e $V = f^{-1}(J)$.

  Claro que $Im(f) \subset I \cup J$, pois $c \notin Im(f)$, portanto $U \cup V = M$. Além disso, como $I \cap J = \emptyset$ segue-se que $U \cap V = \emptyset$. Estas observações

[1] Na verdade, a propriedade de $\mathbb{R}$ ser conexo é equivalente ao axioma do supremo.

mostram que $V = M \setminus U$. Note ainda que, como $a \in I$ e $b \in J$, claro que nem U e nem V são vazios, e nenhum deles é M (pois $V = M \setminus U$).

Agora veja que, como I e J são abertos de $\mathbb{R}$, pelo fato de f ser contínua segue-se que U e V são abertos de M.

Portanto U e V são abertos e fechados em M e nenhum deles é M ou é vazio. Isso contraria a propriedade (ii) e mostra esta implicação.

- $(iii) \Longrightarrow (i)$: Esta implicação é equivalente a dizer que *se M não é conexo existe uma função contínua $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja imagem não é um intervalo*[2]. Isso foi provado no fato 3. ∎

Pode-se reparafrasear este resultado para apresentar caracterizações de conjuntos desconexos. Nesse caso ele toma a seguinte forma:

Fato 6 *Seja (M, d) um espaço métrico. São equivalentes:*

(i) M não é conexo.

(ii) Existe um subconjunto U de M, $\emptyset \neq U \neq M$ que é aberto e fechado em M.

(iii) Existe uma função contínua $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja imagem é $\{0, 1\}$.

Exercício 3 *Demonstre o fato 6.*

Estes resultados estabelecem uma primeira, e muito importante, relação entre conexidade e continuidade.

Diz-se que o espaço métrico M tem a propriedade do valor intermediário se a seguinte propriedade for verdadeira:

Se $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, os reais a e b estão na imagem de f e c está entre a e b, então existe $x \in M$ tal que $f(x) = c$.

Com esse jargão note que a propriedade (iii) do fato 5 afirma que *M é conexo se, e só se tiver a propriedade do valor intermediário.*

Os fatos 5 e 6 caracterizam a espaços métricos conexos ou desconexos, mas é simples ver que eles podem ser adaptados sem dificuldades para caracterizar subconjuntos conexos (ou desconexos) de espaços métricos.

Para isso lembre que se (M, d) é um espaço métrico e $A \subset M$, $A \neq \emptyset$, então a restrição de d a $A \times A$ define uma distância em A e um subconjunto

[2] $(P \Longrightarrow Q) \Longleftrightarrow (\neg Q \Longrightarrow \neg P)$

X de A é aberto nesse espaço $(A, d|_{A\times A})$ se, e só se, existe um subconjunto $U \subset M$, aberto em M tal que $X = A \cap U$.

Com essa noção é imediato ver que o subconjunto A do espaço métrico M é conexo em M se, e só se, o espaço $(A, d|_{A\times A})$ é conexo (demonstre esta afirmação).

Desse modo é simples demonstrar as seguinte proposições.

Fato 7 *Seja (M, d) um espaço métrico e $A \subset M$, $A \neq \emptyset$. São equivalentes:*

(i) *A é conexo em M.*

(ii) *Se U é um aberto de M e $A \cap U$ é fechado em $(A, d|_{A\times A})$ então $A \cap U = A$ ou $A \cap U = \emptyset$.*

(iii) *Se $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua então sua imagem é um intervalo.*

Fato 8 *Seja (M, d) um espaço métrico e $A \subset M$, $A \neq \emptyset$. São equivalentes:*

(i) *A é desconexo em M.*

(ii) *Existe $U \subset M$ que é aberto em M tal que $\emptyset \neq A \cap U \neq A$ e $A \cap U$ é fechado em $(A, d|_{A\times A})$.*

(iii) *Existe $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que sua imagem é o conjunto $\{0, 1\}$.*

Exercício 4 *Demonstre os fatos 7 e 8.*

Para encerrar esta seção, alguns exemplos.

Exemplo 2 Considere um intervalo não degenerado $I \subset \mathbb{R}$ e uma função $f : I \longrightarrow M$ contínua. A imagem de f é um subconjunto conexo de M.

Para provar essa afirmação, suponha por absurdo que $Im(f)$ é um subconjunto desconexo de M. Então, pelo fato 8, existe uma função contínua $g : Im(f) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $Im(g) = \{0, 1\}$. Note que então, existem u e v na imagem de f tais que $g(u) = 0$ e $g(v) = 1$.

Então $h = g \circ f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $Im(h) \subset Im(g) = \{0, 1\}$.

Como u e v tomados acima são pontos de $Im(f)$ existem t_1 e t_2 em I tais que $f(t_1) = u$ e $f(t_2) = v$. Portanto $h(t_1) = 0$ e $h(t_2) = 1$, o que mostra que $Im(h) = \{0, 1\}$. Como h é uma função contínua de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$ isto viola o teorema do valor intermediário e mostra que a hipótese de absurdo não se sustenta e encerra o assunto!

Exemplo 3 Sejam M um espaço métrico e $A \subset M$ um subconjunto conexo de M. Então, se B é um subconjunto da fronteira de A tem-se que $X = A \cup B$ é conexo.

Em outras palavras, não se pode separar A da sua fronteira com conjuntos abertos!

Os detalhes da demonstração da afirmação feita no exemplo 3 são deixadas ao leitor como exerçício, aqui apresenta-se um roteiro da prova.

Suponha por absurdo que $X = A \cup B$ não é conexo. Então pelo fato 8 existe uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua cuja imagem é $\{0, 1\}$

Como A é conexo use o fato 7 e mostre que a restrição $f|_A$ de f a A deve ser constante (justifique esta afirmação).

Então, sem perda de generalidade, admita que $f(x) = 0$, para todo $x \in A$.

Como $Im(f) = \{0, 1\}$, existe um ponto $u \in B \backslash A$ tal que $f(u) = 1$. Prove que isto não pode acontecer (use que isto contraria o fato de f ser contínua em u, constantemente nula em A e u estar na fronteira de A, sugestão por sequências é imediato ver isso, mas pela definição de continuidade por vizinhanças também é simples).

Junte agora os dois exemplos anteriores e veja o seguinte exemplo interessante.

Exemplo 4 O conjunto $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ y = \sin \frac{1}{x}\right\} \cup \{(0, 0)\}$ é conexo em $\mathbb{R}^2$.

De fato, $f(x) = \left(x, \sin \frac{1}{x}\right), x > 0$, é contínua em $(0, +\infty)$, portanto, pelo exemplo 2, $G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ y = \sin \frac{1}{x}\right\}$ é um subconjunto conexo de $\mathbb{R}^2$. Como $(0, 0)$ está na fronteira desse conjunto (certo?) o exemplo 3 mostra que $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ y = \sin \frac{1}{x}\right\} \cup \{(0, 0)\}$ é conexo em $\mathbb{R}^2$.

Aliás, como a fronteira de G é o segmento de reta $F = \{(0, y),\ -1 \leq y \leq 1\}$ (prove isto como exercício), se $B \subset F$, tem-se, pelo resultado do exemplo 3, que $G \cup F$ é conexo.

Este exemplo tem algumas peculiaridades que serão estudadas no futuro.

3 Preservação da Conexidade

Lembre que M e N são espaços métricos.

Nesta seção vai-se mostrar que funções contínuas preservam conjuntos conexos, ou seja a imagem de um conjunto conexo do domínio por uma função contínua é um conjunto conexo no contradomínio.

Esse resultado é, no caso de $M = \mathbb{R}^p$ e $N = \mathbb{R}^q$, o teorema 22.3 do livro de Bartle, a demonstração feita aqui é, como já comentado, diferente da apresentada naquele texto, ambas são simples, e dessa maneira o leitor fica com duas formas distintas de enxergar a questão. Note-se que, embora o texto de Barte, enuncie o resultado para $M = \mathbb{R}^p$ e $N = \mathbb{R}^q$, a demonstração ali apresentada do teorema 22.3 vale para o caso de espaços métricos quaisquer.

A demonstração apresentada aqui é, na verdade, a mesma vista na argumentação feita para justificar as afirmações do exemplo 2, apenas adaptada a uma situação mais geral.

Fato 9 *Se $f : M \longrightarrow N$ é contínua e A é um subconjunto conexo de A então $f(A)$ é um subconjunto conexo de N.*

Demonstração: Suponha, por abusurdo, que $f(A)$ não é conexo.

Então, pelo fato 8, existe $g : f(A) \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua cuja imagem é $\{0, 1\}$. Então existem u e v em $f(A)$ tais que $g(u) = 0$ e $g(v) = 1$.

Considere a restrição $f|_A$ de f a A, que evidentemente é contínua em todo A.

Então $h = g \circ f|_A$ é uma função contínua de A em $\mathbb{R}$ com imagem contida em $Im(g) = \{0, 1\}$. Como u e v estão em $f(A)$ existem x_1 e x_2 em A tais que $f(x_1) = u$ e $f(x_2) = v$. Portanto $Im(h) = \{0, 1\}$.

Isso contraria o fato 7 pois, como A é conexo, a imagem de h deve ser um intervalo. $\blacksquare$

4 Conexidade em $\mathbb{R}^p$

Nesta parte analisa-se a questão de conexidade em $\mathbb{R}^p$. Lembre que considera-se em $\mathbb{R}^p$ a distância usual dada pela norma euclideana.

Uma observação preliminar que será útil é a seguinte.

Se u e v são pontos de $\mathbb{R}^p$ o segmento de reta que une u a v é o conjunto $S_{uv} = \{x \in \mathbb{R}^p \colon x = u + t(v - u),\ 0 \leq t \leq 1\}$. Note que a função $\gamma_{uv} : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^{'}$, $\gamma_{uv}(t) = u + t(v - u)$ é contínua.

Pelo fato 4, $[0, 1]$ é um subconjunto conexo de $\mathbb{R}$, assim decorre da preservação de conexidade por funções contínuas que S_{uv} *é conexo.*

Fato 10 *O espaço métrico $\mathbb{R}^p$ é conexo.*

Demonstração: Se, por absurdo, assim não fosse existira uma função contínua $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}$ com imagem $\{0, 1\}$.

Tome pontos u e v em $\mathbb{R}^p$ tais que $f(u) = 0$ e $f(v) = 1$, e considere a restrição de f ao segmento de reta S_{uv}.

Essa restrição é contínua e, pela construção feita, é imediato que a imagem dessa restrição é $\{0, 1\}$.

Como S_{uv} é conexo isso contraria, mais uma vez, o item (iii) do fato 7 (essa imagem deveria ser um intervalo) e essa contradição encerra a demonstração. ∎

Uma consequência direta deste resultado, que segue do item (ii) do fato 5, é que os únicos subconjuntos de $\mathbb{R}^p$ que são abertos e fechados são $\mathbb{R}^p$ e o vazio.

4.1 Conexos por caminhos e abertos conexos em $\mathbb{R}^p$

Um tipo especial de conjunto conexo é aquele em que dois pontos quaisquer podem ser unidos por uma curva contínua.

Esse conceito une as ideias de conexidade e convexidade (lembre que um conjunto convexo é aquele que contem os segmentos de reta determinados por dois quaisquer de seus pontos).

Uma curva contínua em $X \subset \mathbb{R}^p$ é uma função contínua $\varphi : [a, b] \longrightarrow X$.

No exemplo 2 estabeleceu-se que a imagem de uma curva contínua é um subconjunto conexo de $\mathbb{R}^p$ (e de X).

Definição 3 *Um subconjunto A de $\mathbb{R}^p$ é dito* **conexo por caminhos** *se, e só se, por definição, para todo par de pontos $(u, v) \in A \times A$ existe uma curva contínua em A que use u a v, ou seja, existe $\varphi_{uv} : [a, b] \longrightarrow A$ contínua tal que $\varphi_{uv}(a) = u$ e $\varphi_{uv}(b) = v$.*

Claro que conjuntos convexos $A \subset \mathbb{R}^p$ são conexos por caminhos.

Exemplo 5 O CONJUNTO $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\right\}$ NÃO É CONVEXO MAS É CONEXO POR CAMINHOS (DEMONSTRE COMO EXERCÍCIO).

Exemplo 6 $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq y \leq 2x^2\right\}$ É CONEXO POR CAMINHOS EMBORA NÃO SEJA CONVEXO (PROVE ESTAS AFIRMAÇÕES).

Fato 11 *Se $A \subset \mathbb{R}^p$ é conexo por caminhos então A é conexo.*

Demonstração: Suponha, por absurdo, que isso não ocorre. Então existe uma função contínua $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ cuja imagem é $\{0, 1\}$. Tome pontos u

e v em A tais que $f(u) = 0$ e $f(v) = 1$ e considere uma curva contínua $\varphi_{uv} : [a, b] \longrightarrow A$ tal que $\varphi_{uv}(a) = u$ e $\varphi_{uv}(b) = v$ (existe uma curva assim por que A é conexo por caminhos).

Então $h = f \circ \varphi_{uv}$ é uma função contínua do intervalo $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ cuja imagem está contida em $Im(f) = \{0, 1\}$. Como, por construção, $h(a) = 0$ e $h(b) = 1$, vem que $Im(h) = \{0, 1\}$, e isto contraria o teorema do valor intermediário e essa contradição encerra a demonstração. $\blacksquare$

Uma observação interessante é que *a recíproca deste resultado* **NÃO É VERDADEIRA**, conforme se vê a seguir.

No exemplo 4 viu–se que $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x > 0,\ y = \sin \frac{1}{x}\right\} \cup \{(0, 0)\}$ é conexo em $\mathbb{R}^2$.

É simples que H não é conexo por caminhos, basta considerar os pontos $u = (\frac{1}{2\pi}, 0)$ e $v = (0, 0)$ que estão em H e ver que nenhuma curva contínua que fique em H consegue ligar u a v (esta afirmação segue-se do fato de $g(x) = \sin \frac{1}{x}$, se $x > 0$ e $g(0) = 0$ ser desconínua em $0+$).

Agora vai-se ver que para subconjuntos *abertos* de $\mathbb{R}^p$ a recíproca do fato 11 é verdadeira.

Na prova dessa propriedade será útil usar a noção de concatenação de curvas.

Suponha que $A \subset \mathbb{R}^p$ e $\varphi_1 : [a, b] \longrightarrow A$, $\varphi_2 : [c, d] \longrightarrow A$ são curvas contínuas em A tais que $\varphi_1(b) = \varphi_2(c)$, ou seja, a curva φ_2 "começa"onde φ_1 "termina". Nesse caso pode-se construir uma curva contínua em A ligando os pontos $\varphi_1(a)$ e $\varphi_2(d)$ juntando as curvas φ_1 e φ_2. Tecnicamente isso é considerando $\delta = d - c$ e definindo a curva $\varphi : [a, b + \delta] \longrightarrow A$ por $\varphi(t) = \varphi_1(t)$, se $t \in [a, b]$, e $\varphi(t) = \varphi_2(c + (t - b))$, se $t \in [b, b + \delta]$. A continuidade de φ é imediata visto que φ_1 e φ_2 são contínuas e $\varphi_1(b) = \varphi_2(c)$. Essa curva φ chama-se, por definição, concatenação de φ_1 e φ_2.

Fato 12 *Seja $U \subset \mathbb{R}^p$ um aberto. Então U é conexo se, e só se, U é conexo por caminhos.*

Demonstração: Já se mostrou no fato 11 que se U for conexo por caminhos então U é conexo.

Para a recíproca suponha que $U \subset \mathbb{R}^p$ é um aberto conexo.

Se $U = \emptyset$ claro que U é conexo por caminhos.

Se $U \neq \emptyset$ tome $\overline{x} \in U$ e defina

$$W = \{y \in U \colon \text{existe uma curva contínua } \varphi_{\overline{x}y} : [a, b] \longrightarrow U \text{ que une } \overline{x} \text{ a } y\}$$

e $V = U \setminus W$, ou seja V é o conjunto dos pontos de U que não pode ser ligado a $\overline{x}$ por uma curva conínua.

O ponto essencial da demonstração será provar que W e V são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^p$, que é feito a seguir.

- **W é um subconjunto aberto de** $\mathbb{R}^p$: De fato tome $y \in W$, então existe uma curva contínua $\varphi_{\overline{x}y} : [a, b] \longrightarrow U$ tal que $\varphi_{\overline{x}y}(a) = \overline{x}$ e $\varphi_{\overline{x}y}(b) = y$.

  Além disso, por U ser aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(y, \varepsilon) \subset U$. Note agora que $B(y, \varepsilon)$ é convexo [prove isto como exercício], portanto se $z \in B(y, \varepsilon)$ o segmento de reta que une y a z, $\gamma_{yz}(t) = y + t(z - y)$, $0 \leq t \leq 1$ fica contido em $B(y, \varepsilon) \subset U$.

  Note que $\varphi_{\overline{x}y}(b) = \gamma_{yz}(0) = y$, assim pode-se fazer a concatenação de $\varphi_{\overline{x}y}$ e γ_{yz} e obter uma curva contínua em A que une $\overline{x}$ a z. Portanto $z \in U$, o que mostra que $B(y, \varepsilon) \subset W$ e fica provado que W é aberto.

- **$V = U \setminus W$ é um subconjunto aberto de** $\mathbb{R}^p$: A demonstração é muito parecida com a anterior. Tome $y \in V$, então *não existe curva contínua em U que liga $\overline{x}$ a y.*

  Como U é aberto, existe $\rho > 0$ tal que $B(y, \rho) \subset U$.

  Agora vai-se provar que $B(y, \rho) \subset V$. De fato, se, por absurdo, existisse w nessa bola que não está em V. Como $B(y, \rho) \subset U$ então $w \in U \setminus V = W$.

  Portanto existiria uma curva contínua em U, $\varphi_{\overline{x}w} : [a, b] \longrightarrow U$, com $\varphi_{\overline{x}w}(a) = \overline{x}$ e $\varphi_{\overline{x}w}(b) = w$.

  Então, ao concatenar $\varphi_{\overline{x}w}$ com o segmento de reta $\gamma_{wy}(t) = w + t(y - w)$, $t \in [0, 1]$, de extremidades w e y (que fica contido no convexo $B(y, \rho) \subset U$), obter-se-ia uma curva contínua em U que ligaria $\overline{x}$ a y, o que contraria o fato de $y \in V$.

  Assim $B(y, \rho) \subset V$ e fica provado que V é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^p$.

Assim W e V são abertos de $\mathbb{R}^p$, ambos contidos em U, com interceção vazia e $W \cap V = U$, portanto o par (W, V) é uma cisão de U. Como U é conexo, resulta destas considerações que um dos conjuntos W e V deve ser vazio e o outro será igual a U.

Como é claro que $\overline{x} \in W$, tem–se $W = U$.

Então *todos os pontos de U podem ser ligados a $\overline{x}$ por uma curva contínua em U* e isto implica de pronto que U é conexo por caminhos. ∎

Na verdade poderia provar-se um resultado ligeiramente mais forte que este, *Um subconjunto aberto U de $\mathbb{R}^p$ é conexo se, e só se U for* **conexo por poligonais**, isto é, em $\mathbb{R}^p$ um aberto U é conexo se, e só se, para todo par de pontos $(u, v) \in U \times U$ existe uma poligonal que une u a v contida em U.

Este é o resultado enunciado e provado no livro de Bartle no teorema 12.7.

A demonstração tem as mesmas ideias vistas na prova do fato 12 com alguns detalhes técnicos a mais.

O leitor fica convidado a ver essa prova no livro texto.

4.1.1 Conexos em $\mathbb{R}$

Viu-se no fato 4 que intervalos são subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$, agora vai–se mostrar que estes são os únicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$.

Fato 13 *Um subconjunto I de $\mathbb{R}$ é conexo se, e só se, I é um intervalo.*

Demonstração: Já se viu que intervalos são conexos.

Claro que para provar a recíproca é suficiente mostrar que se I não for um intervalo então I não é conexo.

Suponha então que $I \subset \mathbb{R}$ não é um intervalo então existem reais $a < b$ em I e c entre a e b tais que $c \notin I$.

Então os abertos da reta, $U = (-\infty, c)$ e $V = (c, +\infty)$, são tais que:

(i) $W \cap V = \emptyset$

(ii) $(U \cap I) \cup (V \cap I) = I$ (pois $c \notin I$)

(iii) $a \in U \cap I$ e $b \in V \cap I$.

Portanto o par (U, V) é uma cisão não trivial de I, o que mostra que I não é conexo. ∎