MAP 0217 - MAT 0311 1° Semestre - IME USP
Continuidade - Aspectos Globais

1 Introdução

Aqui serão vistas as propriedades básicas de funções contínuas em todo seu domínio, este é um tópico muito *topológico* da disciplina.

O material estudado é coberto na seção 22 no livro de Bartle, com o auxílio das seções 12 (para conexidade em espaços métricos) e 11 (para compacidade em espaços métricos).

Como mencionado na nota anterior o esquema básico é para este assunto o seguinte:

1. Propriedades Gerais.
2. Continuidade e conexidade.
3. Continuidade uniforme (Caso geral e $\mathbb{R}^p$).
4. Continuidade e compacidade (Caso geral e $\mathbb{R}^p$).
5. Pontos fixos, contrações.

Nesta nota discutem–se as propriedades gerais, algo de aparência bem simples, mas de alcance e profundidade muito grandes, lembrem–se que "os grandes perfumes vêm em pequenos frascos", certo?

2 Funções Contínuas - Caracterização

Sejam (M, d) e $(N, \widetilde{d})$ espaços métricos, que serão denotados apenas por M e N.

Lembre que um subconjunto $X \subset M$ é aberto se, por definição, se todo ponto $a \in X$ é ponto interior, ou seja, existe uma vizinhança V de a tal que $V \subset X$, decorre de pronto da definição de vizinhança que isto é o mesmo que dizer que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(a, \varepsilon) \subset X$.

E um subconjunto $H \subset M$ é fechado, por definição, se seu complementar, $M \setminus X$, é aberto.

Funções $f : M \longrightarrow N$ contínuas em todos os pontos de M estão ligadas de modo muito direto a conjuntos abertos e conjuntos fechados, mas antes de começar a ver essa relação, alguns exemplos para deixar evidentes propriedades que **NÃO** valem!

Exemplo 1 $M = N = \mathbb{R}$ com a distância usual $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Claro que f é contínua em todos os pontos, agora veja o seguinte, $U = (-1, 1)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$, mas $W = f(U) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x),\ x \in U\} = [0, 1)$ **NÃO** é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$.

Apesar dos boatos em contrário, funções contínuas não levam abertos em abertos! Nem sempre...

Exemplo 2 Considere $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \arctan x$, $x \in \mathbb{R}$. Claro que f é contínua, mas $H = [0, +\infty[$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ e... $V = f(H) = [0, \frac{\pi}{2}[$ **NÃO** é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$.

Assim, mais uma vez... Cuidado com as chamadas *fake news*, apesar dos boatos em contrário, funções contínuas não levam fechados em fechados! Nem sempre...

A relação entre continuidade e subconjuntos abertos (ou com cubconjuntos fechados) aparece ao tomar-se a pré-imagem do conjunto, de modo preciso, o que vale é:

Fato 1 *Seja $f : M \longrightarrow N$, as seguintes afirmaçõea são equivalentes:*

(i) f é uma função contínua em todos os pontos;

(ii) Se V é um subconjunto aberto do seu **contradomínio** *N então a pré–imagem*[1] *de V, $f^{-1}(V)$, é um subconjunto aberto de M.*

(iii) Se H é um subconjunto fechado do seu **contradomínio** *N então a pré–imagem de H, $f^{-1}(H)$, é um subconjunto fechado de M.*

Antes de pensar em algo como demonstração do resultado considere a seguinte questão, e se f estiver definida em um subconjunto $X \subset M$, como fica o fato 1?

Na verdade a resposta é que esse resultado pode ser aplicado para essa situação, veja o seguinte

2.1 Um pouco sobre subespaços métricos

Considere um espaço métrico (M, d) e um subconjunto $X \subset M$, $X \neq \emptyset$.

A distância d em M induz naturalmente uma distância em X, dada pela sua restrição, $d_X = d|_{X \times X}$, assim é imediato que (X, d_X) é um espaço, que

[1]Lembre que se $W \subset N$ a pré–imagem de W por f é $f^{-1}(W) = \{x \in M\ f(x) \in W\}$.

será denotado no futuro por X_d e é simples ver quais são os abertos desse espaço.

Exercício 1 *Demonstre que um subconjunto $A \subset X$ é um aberto do espaço métrico X_d se, e só se, existe um subconjunto $U \subset M$, aberto no espaço métrico M, tal que $A = X \cap U$.*

Em outras palavras, os abertos de X_d são as intersecções de X com os abertos de M.

Perceba agora que, nesse contexto, se $(N, \widetilde{d})$ é também um espaço métrico ao analisar–se a continuidade de uma função $f : X \longrightarrow N$ definida no subconjunto X do espaço métrico M a valores em N, está–se a analisar a continuidade de f *considerada como função definida no espaço métrico X_d com valores em N*, então o fato 1 aplica-se sem nenhum problema, além disso, o uso combinado desse resultado com o exercício 1 prova de pronto o resultado a seguir:

Fato 2 *Sejam $X \neq \emptyset$ um subconjunto do espaço métrico M e $f : X \longrightarrow N$. São equivalentes:*

(i) f é uma função contínua em todos os pontos;

(ii) Se V é um subconjunto aberto do seu **contradomínio** *N então existe um subconjunto aberto U em M tal que $f^{-1}(V) = U \cap X$.*

(iii) Se H é um subconjunto fechado do seu **contradomínio** *N então existe um subconjunto fechado G de M tal que $f^{-1}(H) = G \cap X$.*

Este é o teorema 22.1 do livro de Bartle enunciado para o caso de funções definidas entre espaços métricos.

Aqui aconselha-se o leitor a estudar o exercício 1 e perceber que, como consequência direta dele, o fato 2 nada mais é do que o fato 1 com X_d no lugar de M.

Na segunda edição do texto de Bartle, *The Elements of Real Analysis*, o resultado enunciado primeiro é o fato 2 (teorema 22.1) e o fato 1 é então obtido como caso particular (corolário 22.2), a razão para isso é evitar a discussão feita na aqui que levou ao exercício 1.

2.2 Sobre a demonstração do fato 1

A demonstração feita no supramencionado livro de Bartle, embora feita para o caso de $M = \mathbb{R}^p$ e $M = \mathbb{R}^q$ é adaptada de modo simples para a situação geral de espaços métricos. O leitor fica convidado a comprovar esta afirmação.

Como o fato 1 é um resultado que estabelece equivalências entre as propriedades (i), (ii) e (iii), há duas formas padrão de fazer a prova:

- Linear: $(i) \iff (ii) \iff (iii)$
- Circular: $(i) \implies (ii) \implies (iii) \implies (i)$

O livro usa o método linear, aqui vai-se comentar a demonstração circular.

(A) $(i) \implies (ii)$ Feita no livro, e muito simples. Suponha que f é contínua em todos os pontos e considere um subconjunto aberto V de N. Se $f^{-1}(V) = \emptyset$ o resultado está provado, o conjunto vazio é. Caso contrário tome $x \in f^{-1}(V)$, para provar que $f^{-1}(V)$ é um aberto de M, basta mostrar que x é um ponto interior a esse conjunto.

Para isto, considere $y = f(x) \in V$ e veja que, como V é aberto então *V é uma vizinhança de y.* Assim, *como f é contínua em x* e $y = f(x)$ existe uma vizinhança W de x tal que

$$z \in W \implies f(z) \in V.$$

Portanto $W \subset f^{-1}(V)$ e isto mostra que x é de fato um ponto interior a $f^{-1}(V)$.

(B) $(ii) \implies (iii)$ Feita no texto, basta lembrar que se H é fechado então $V = N \setminus H$ é aberto e aplicar (ii) para este conjunto.

(C) $(iii) \implies (i)$ Esta é a implicação que não está demonstrada (de modo direto) no livro. Vai-se fazer aqui uma demonstração direta desta parte.

Seja $f : M \longrightarrow N$ uma função tal que a pré-imagem de qualquer subconjunto fechado de N é um subconjunto fechado de M e tome um ponto arbitrário $x \in M$. Deve-se provar que f é contínua em x.

Para isso, tome V uma vizinhança qualquer de $y = f(x)$, deve-se provar que existe uma vizinhança U de x tal que $f(U) \subset V$.

Como V é vizinhança de y existe um aberto W de N tal que $y \in W \subset V$.

Então $H = N \setminus W$ é fechado em N, portanto, por (iii), $G = f^{-1}(H)$ é um sub conjunto fechado de M e, como $y = f(x) \in W$, claro que $x \notin G$, isto é, $x \in M \setminus G$.

Perceba agora que $U = M \setminus G$ é um subconjunto aberto de M, pois G é fechado, então U é uma vizinhança de x e, como $G = f^{-1}(H)$ tem–se que

$$z \in U = M \setminus G \Longrightarrow f(z) \notin H = N \setminus W \Longrightarrow f(z) \in W \subset V.$$

Isso mostra que $f(U) \subset W \subset V$ e termina a prova. $\blacksquare$

3 Aplicação

Uma tarde, antes da pandemia destruir as aulas, comentou–se que a prova de que o interior de uma elipse $U = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$ é de fato um conjunto aberto ($a > 0$ e $b > 0$) podia ser feita em uma linha, basta conhecer o "canhão correto"para isso...

Pois é, agora você conhece o canhão! É o inocente fato 1.

Veja, considere $a > 0$, $b > 0$ e o polinômio $f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, claro que f é contínua no plano todo (é até um polinômio...) então, pelo item (ii) do fato 1, $f^{-1}(]-1, 1[)$ é um subconjunto aberto do plano, pois $]-1, 1[$ é um aberto de $\mathbb{R}$. E é imediato que $U = f^{-1}(]-1, 1[)$.

Também é uma aplicação imediata de fato 1 que

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon \tfrac{1}{x^2+y^2+1} + \tfrac{1}{y^2+z^2+1} + \tfrac{1}{x^2+z^2+1} = \tfrac{1}{17}\}$$

é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^3$ e...