MAP 0217 MAT 0311 2023 1° Semestre - IME USP
$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios

Questão 1 Seja ℓ_∞ o conjunto de todas as sequências $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$ de números reais que são limitadas, i.e. existe $K > 0$ tal que, para todo natural $n \geq 1$, tem–se $|x_n| \leq K$.

Mostre que, se $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n \ldots)$ e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$, a função $d(x, y) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n - y_n|\}$ define uma métrica em ℓ_∞.

Questão 2 Seja $\mathcal{R}([a, b])$ o conjunto de todas as funções integráveis segundo Riemman (no sentido próprio).

Decida se a função $d_1(f, g) = \int\limits_a^b |f(t) - g(t)|dt$ é uma distância em $\mathcal{R}([a, b])$.

Antes de continuar, uma recordação de algumas notações vistas no curso:

Definição 1 *Sejam (M, d) um espaço métrico e $A \subset M$.*

(i) O interior de *A é o conjunto*

$$A^\circ = \{x \in A \colon \exists r > 0 \ com\ B_r(x) \subset M\}.$$

(ii) O exterior de *A é o conjunto*

$$extA = \{x \in M \colon \exists r > 0 \ com\ B_r(x) \subset M \setminus A\}.$$

(iii) A fronteira de *A é o conjunto*

$$\partial A = \{x \in M \colon \forall r > 0 \, tem\text{-}se\, B_r(x) \cap A \neq \emptyset \ e\ B_r(x) \cap (M \setminus A) \neq \emptyset\}.$$

(iv) O ponto $x \in M$ é chamado ponto de acumulação *de A se*

$$\forall r > 0 \, tem\text{-}se\, B_r(x) \cap A \setminus \{x\} \neq \emptyset,$$

o conjunto de todos os pontos de acumulação de A chama-se conjunto derivado de *A e é denotado por A'.*

Questão 3 Sejam (M, d) um espaço métrico e $A \subset M$. Mostre que A° é o *maior* aberto contido em A, no seguinte sentido:

Prove que A° é aberto e, além disso, se $V \subset A$ é aberto, então $V \subset A^\circ$.

Questão 4 Prove que se (M, d) é um espaço métrico e $X \subset M$ então:

(i) $X^\circ \cap \partial X = X^\circ \cap \operatorname{ext} X = \partial X \cap \operatorname{ext} X = \emptyset$.

(ii) $X^\circ \cup \partial X \cup \operatorname{ext} X = X$.

(iii) X é aberto se, e só se, $X = X^\circ$.

(iv) X é fechado se, e só se, $\partial X \subset X$.

Agora, uma definição nova:

Definição 2 *Seja (M, d) um espaço métrico. Se $X \subset M$ chama–se fecho topológico de X (ou simplesmente fecho de X) ao conjunto $\overline{X} = X \cup \partial X$*

Questão 5 Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Prove que:

(i) $\overline{X}$ é um subconjunto fechado de M.

(ii) $\overline{X} = X \cup X'$.

(iii) Se $F \subset M$ é fechado e $X \subset F$ então $\overline{X} \subset F$ (ou seja F é o *menor* fechado que contém X)

Questão 6 Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^p$, decida se é verdade que:

(i) $\Omega \subseteq \left(\overline{\Omega}\right)^\circ$

(ii) $\left(\overline{\Omega}\right)^\circ = \Omega$.

Questão 7 Encontre um subconjunto A de $\mathbb{R}^p$ tal que seu interior é vazio mas $\left(\overline{A}\right)^\circ = \mathbb{R}^p$.