MAP 0217 - MAT 0311 2023 1° Semestre - IME USP
Lista Extra de Exercícios

Uma notação que será útil nesta lista é a seguinte, se (M, d) e $(N, \widetilde{d})$ são espaços métricos $f : (M, d) \longrightarrow (N, \widetilde{d})$ denotará uma função do primeiro espaço métrico no segundo.

Definição 1 *Seja M um conjunto, $M \neq \emptyset$. Duas distâncias d e $\widetilde{d}$ em M são chamadas* ***equivalentes*** *se, por definição, definem os mesmos conjuntos abertos, ou seja,*

$$\{A \subset M : A \text{ é aberto em } (M, d)\} = \left\{A \subset M : A \text{ é aberto em } (M, \widetilde{d})\right\}.$$

Essa definição pode ficar mais compreensível com os exercícios abaixo.
Notação: Por comodidade nesta lista a bola aberta de centro x e raio r no espaço métrico (M, d) será representada por $B_r(x, d)$, mencionado de forma explícita a distância envolvida.

Questão 1 Duas distâncias d e $\widetilde{d}$ no conjunto M, $M \neq \emptyset$, são equivalentes se, e só se, para todo $x \in M$ e todo $r > 0$ existem reais $0 < r' < r''$ (que podem depender de x e de r) tais que

$$B_{r'}(x, d) \subset B_r(x, \widetilde{d}) \text{ e } B_{r''}(x, \widetilde{d}) \subset B_r(x, d)$$

Note que r' e r" podem depender de x (não apenas de r).

Uma maneira mais interessante de caracterizar equivalência de métricas é vista adiante na questão 3.

Relembre a definição de continuidade para funções entre espaços métricos.

Definição 2 *Sejam (M, d) e $(N, \widetilde{d})$ espaços métricos, $f : (M, d) \longrightarrow (N, \widetilde{d})$ é dita contínua em $x \in M$ se, por definição, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:*

$$z \in B_\delta(x, d) \Rightarrow f(z) \in B_\varepsilon(f(x), \widetilde{d}).$$

Se f for contínua em todos os pontos diz-se apenas que f é contínua.

No caso em que $M = N$ (e d e $\widetilde{d}$ são diferentes) e f é uma função de M em M, pode-se encarar a questão da continuidade de vários modos diferentes (devido à falta de simetria entre os papéis de M e N na definição 2) ao considerar as diferentes possibilidades de métricas no domínio e no contra-domínnio.

Se $f:(M,d)\longrightarrow(N,\widetilde{d})$ for contínua diz-se que f é $(d,\widetilde{d})$-contínua, se $f:(M,d)\longrightarrow(M,d)$ for contínua diz-se apenas que f é d-contínua.

Questão 2 Seja $M=\left\{f:[0,1]\xrightarrow{\mathcal{C}}\mathbb{R}\right\}$ e considere em M as distâncias $d_1(f,g)=\int\limits_0^1|f(t)-g(t)|dt$ e $d_\infty(f,g)=\sup\limits_{t\in[0,1]}\{|f(t)-g(t)|\}$.

Tome a função identidade $I:M\longrightarrow M$, $I(f)=f$, e decida se:

(i) I é (d_∞,d_1)-contínua;

(ii) I é (d_1,d_∞)-contínua.

Agora talvez não seja tão surpreendente a próxima questão...

Questão 3 Duas distâncias d e $\widetilde{d}$ no conjunto M, $M\neq\emptyset$, são equivalentes se, e só se, a função identidade for tanto $(d,\widetilde{d})$-contínua como $(\widetilde{d},d)$-contínua.

Outra maneira de entender o que significa duas distâncias serem equivalentes é visto na questão 4, antes dela apresenta-se uma última notação, se(M,d) e $(N,\widetilde{d})$ são espaços métricos o conjunto das funções contínuas de (M,d) em $(N,\widetilde{d})$ é representado por $\mathcal{C}\left((M,d),(N,\widetilde{d})\right)$. Se $M=N$ e $d=\widetilde{d}$ este conjunto representa-se apenas por $\mathcal{C}\,(M,d)$.

Questão 4 Duas distâncias d e $\widetilde{d}$ no conjunto M, $M\neq\emptyset$, são equivalentes se, e só se, $\mathcal{C}\,(M,d)=\mathcal{C}\left(M,\widetilde{d}\right)$

Ou seja, duas distâncias são equivalentes quando, e apenas quando, elas definem as mesmas funções contínuas.

Uma noção mais forte de equivalência é vista na definição seguinte.

Definição 3 *Seja M um conjunto, $M\neq\emptyset$. Duas distâncias d e $\widetilde{d}$ em M são ditas **uniformemente equivalentes** se, por definição, existem constantes $0<\alpha<\beta$ tais que, para todo par $(x,y)\in M\times M$, tem–se*

$$\alpha d(x,y)\leq\widetilde{d}(x,y)\leq\beta d(x,y).$$

Questão 5 Para $p\geq1$ considere a distância em $\mathbb{R}^n$ definida por $d_p(x,y)=\left(\sum\limits_{k=1}^n|x_k-y_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

(i) Mostre que d_p é uniformemente equivalente à distância

$$d_\infty(x,y)=\max\{|x_k-y_k|,1\leq k\leq n\};$$

(ii) Mostre que, se $1 \leq p \leq q$ então d_p e d_q são uniformemente equivalentes.

Questão 6 Prove que se d e $\widetilde{d}$ são métricas uniformemente equivalentes em M então $f : M \longrightarrow M$ é d-uniformemente contínua se, e apenas se, for $\widetilde{d}$-uniformemente contínua.

Questão 7 Seja $d : (0,1] \times (0,1]$ definida por $d(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$.

(i) Prove que d é uma distância em $(0,1]$.

(ii) Faça um desenho das bolas de centro $\frac{1}{n}$ e raio 1 (em relação à distância d) e veja o que acontece para $n \to \infty$.

(iii) Prove que d é equivalente à distância usual em $(0,1]$.

(iv) Decida se d é uniformemente equivalente à distância usual de $(0,1]$.

Questão 8 Considere $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por $d(x,y) = |\arctan(x-y)|$.

(i) Prove que d é uma distância em $\mathbb{R}$.

(ii) Mostre que $d(x,y) < \pi,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

(iii) Considere $c \in \mathbb{R}$ e faça um desenho das bolas de centro c e raio $\pi - \frac{1}{n}$ (em relação à distância d) e veja o que acontece para $c \to \infty$ (ou $c \to -\infty$) e $n \to \infty$.

(iv) Mostre que se (x_n) é uma sequência monotônica de reais então, em relação à distância d, a sequência (x_n) é de Cauchy.

(v) Decida se d é, ou não, equivalente à distância usual em $\mathbb{R}$.

(vi) Decida se d é uniformemente equivalente à distância usual de $(0,1]$.