Solução de equações – Capítulo 3

Queremos resolver de forma numérica, equações, ou seja encontrar as raízes de f(x)=0.

3.2 Localização das raízes: métodos gráficos

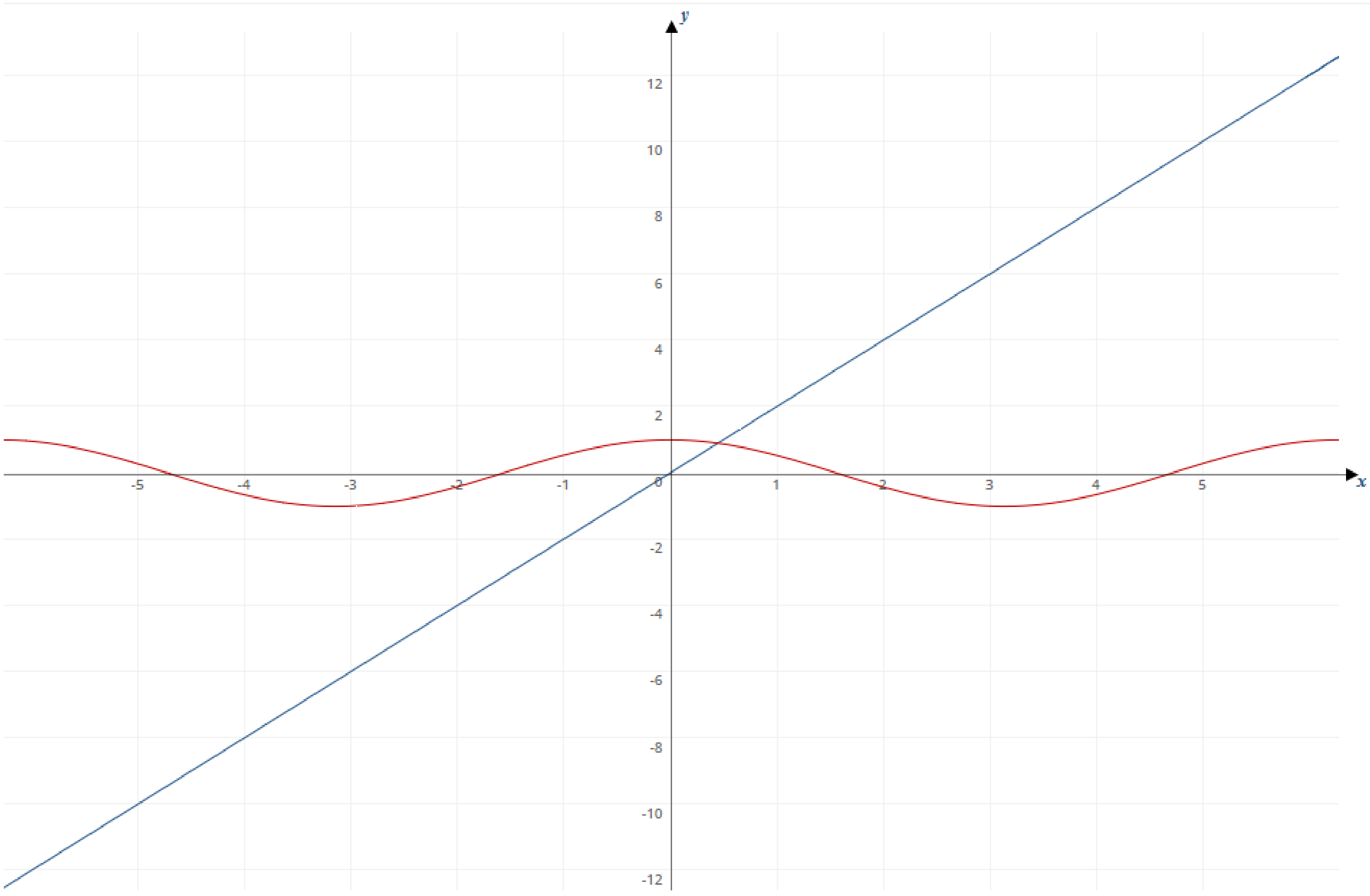
Apresentamos dois procedimentos gráficos que podem ser usados para a localização das raízes da função f(x):

- Podemos localizá-las a partir do gráfico da função.
  - Hoje temos softwares para fazer gráficos de funções complicadas.

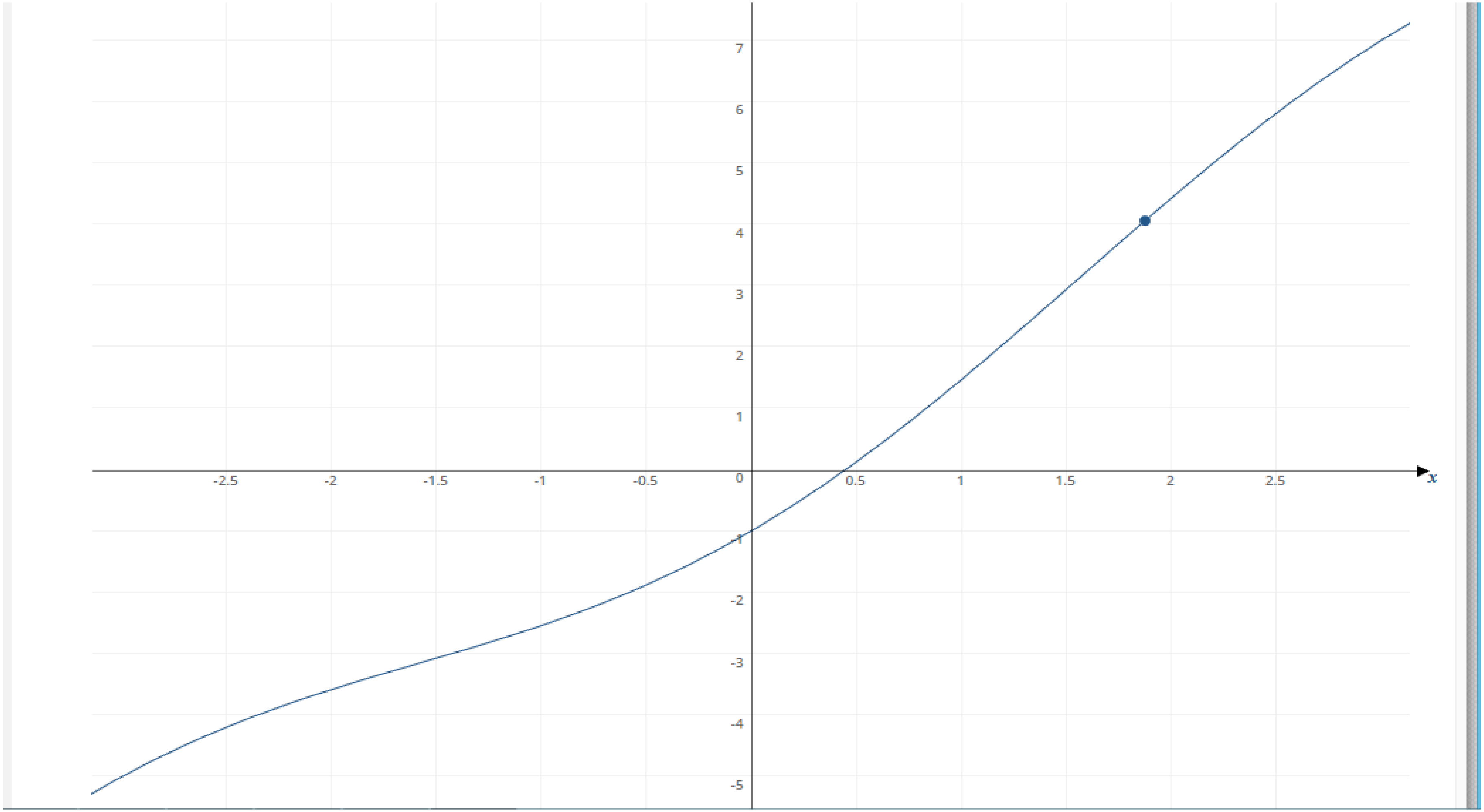
- Podemos reescrever a função como uma igualdade entre duas funções.

Exemplo: $f(x)=2x - \cos(x)=0$

$f(x)=2x$ e $g(x)=\cos(x)$



Exemplo: $f(x) = 2x - \cos(x) = 0$

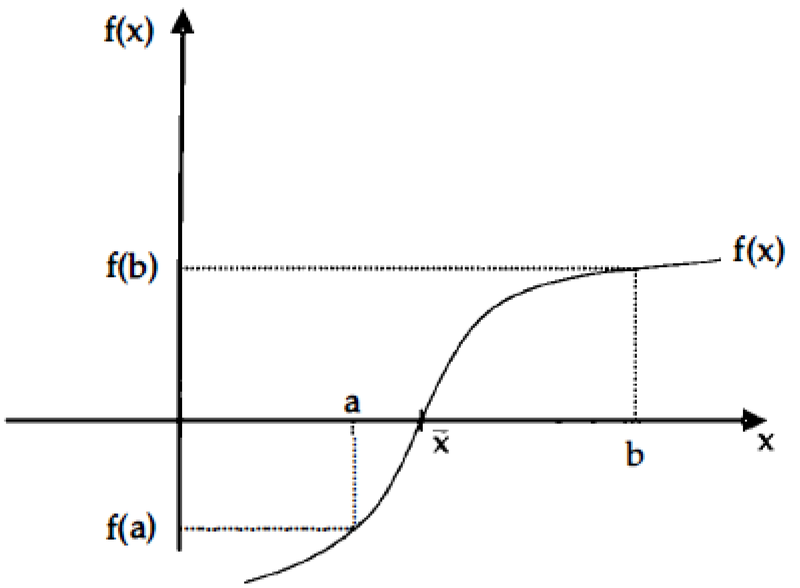


Exemplo: **$f(x) = 2x - \cos(x) = 0$**

E se não pudermos desenhar o gráfico? **(Algo difícil nos dias de hoje!)**

	x	f(x)
" -pi "	-3.142	-5.283
" - pi/2 "	-1.571	-3.142
" - pi/4 "	-0.785	-2.278
"0"	0.000	-1.000
" pi/4 "	0.785	0.864
" pi/2 "	1.571	3.142
" pi "	3.142	7.283

A ideia mais importante do capítulo



Teorema: Se f(x) for uma função contínua num intervalo [a,b] e trocar de sinal nos extremos desse intervalo, então existe pelo menos uma raiz real no intervalo [a,b].

Exemplo:

$$\text{resolver a equação } \cos(x) - x = 0$$

- **Método Gráfico:** plotar o gráfico da Função

Gráfico da Função:

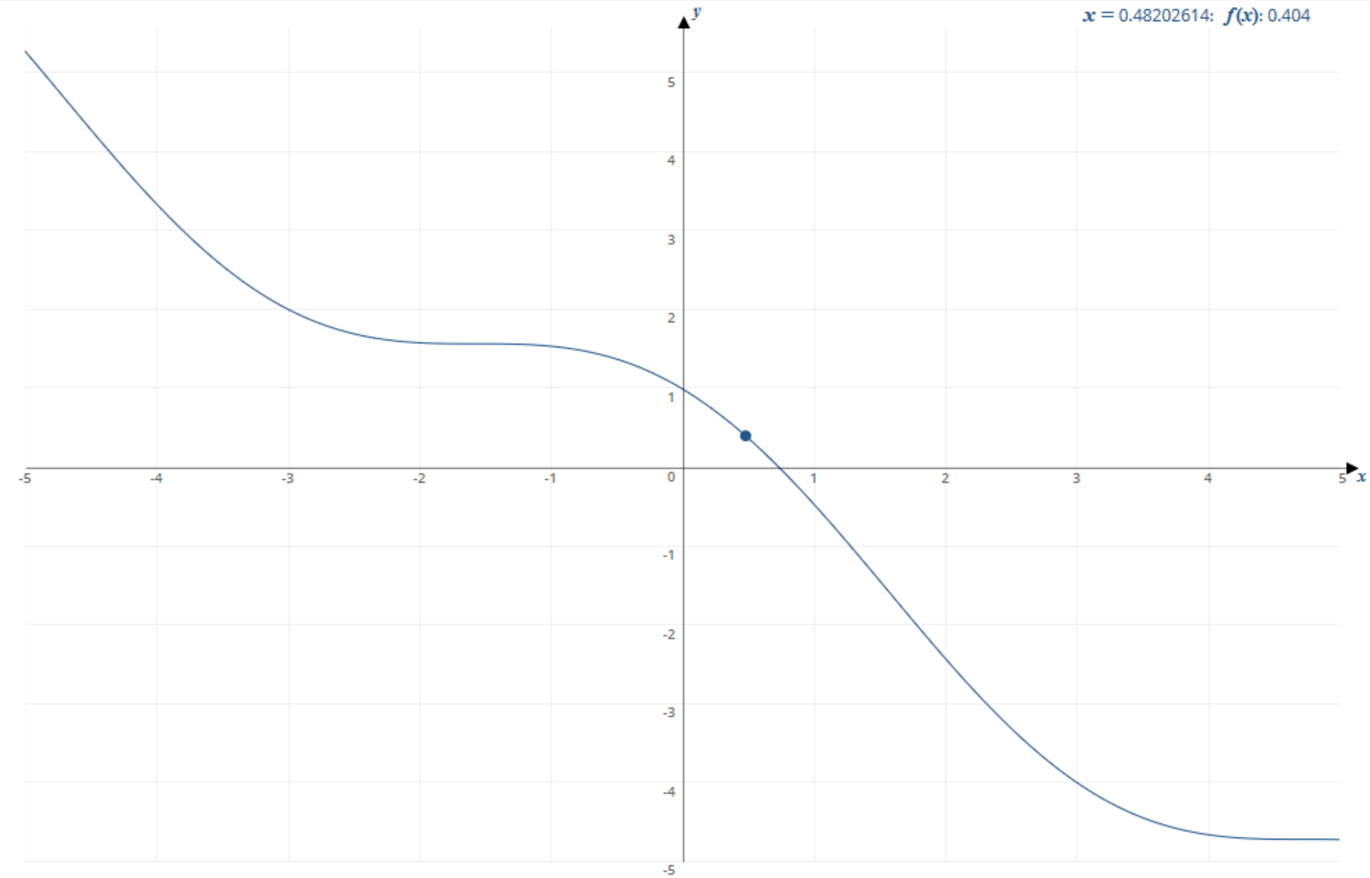
$f(x)$ = cos(x)-x

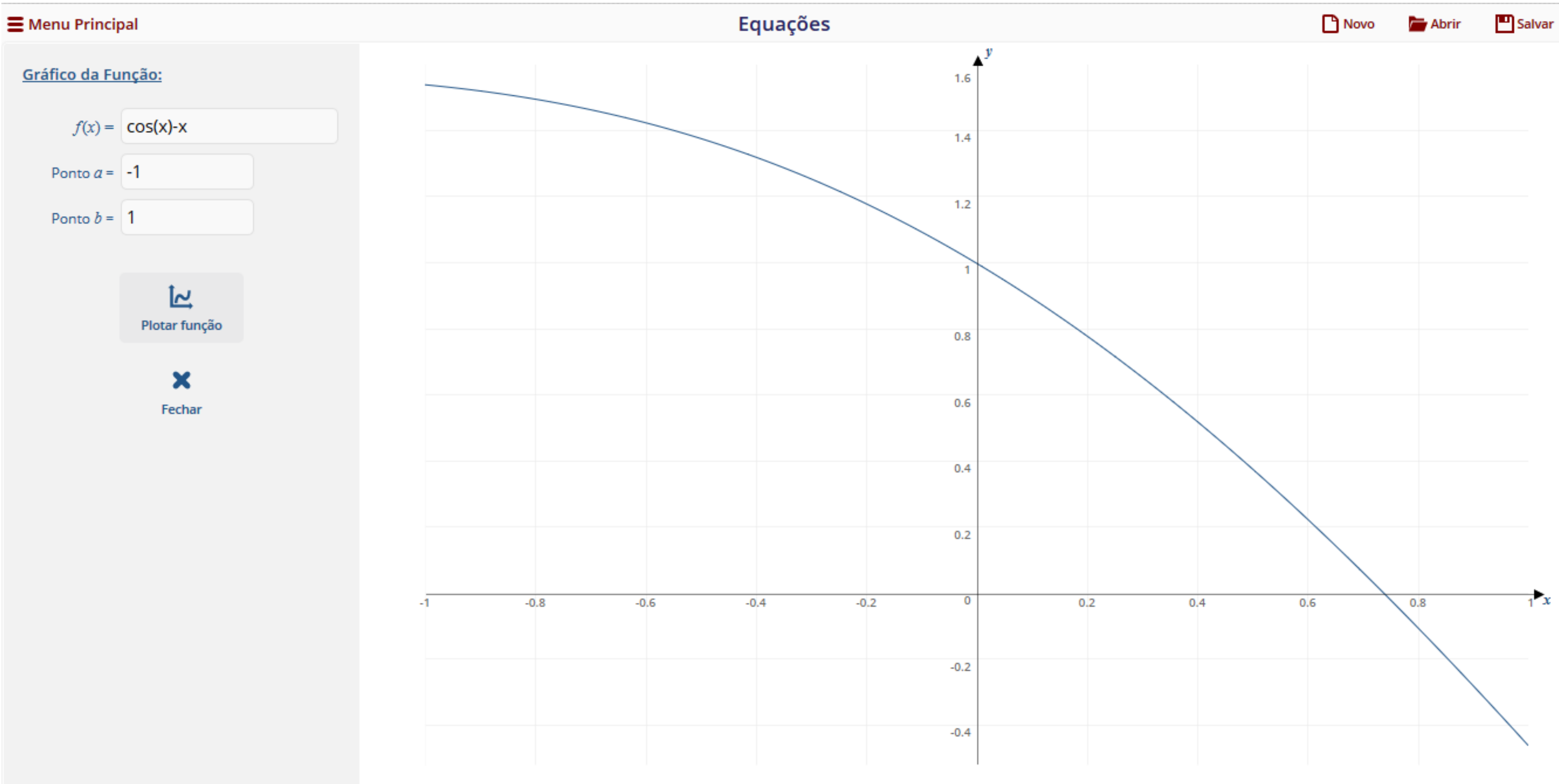
Ponto a = -5

Ponto b = 5

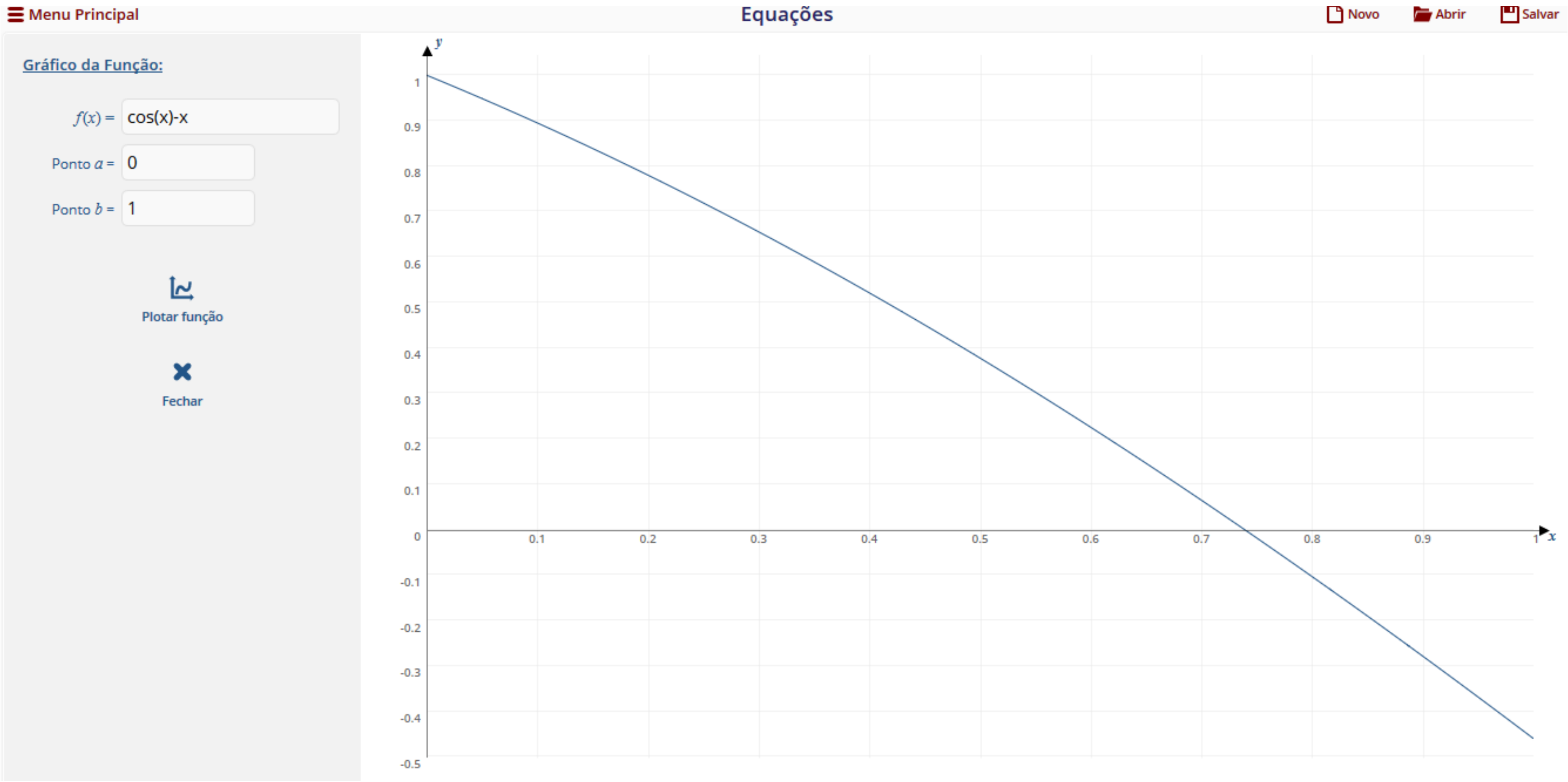
Plotar função

Fechar

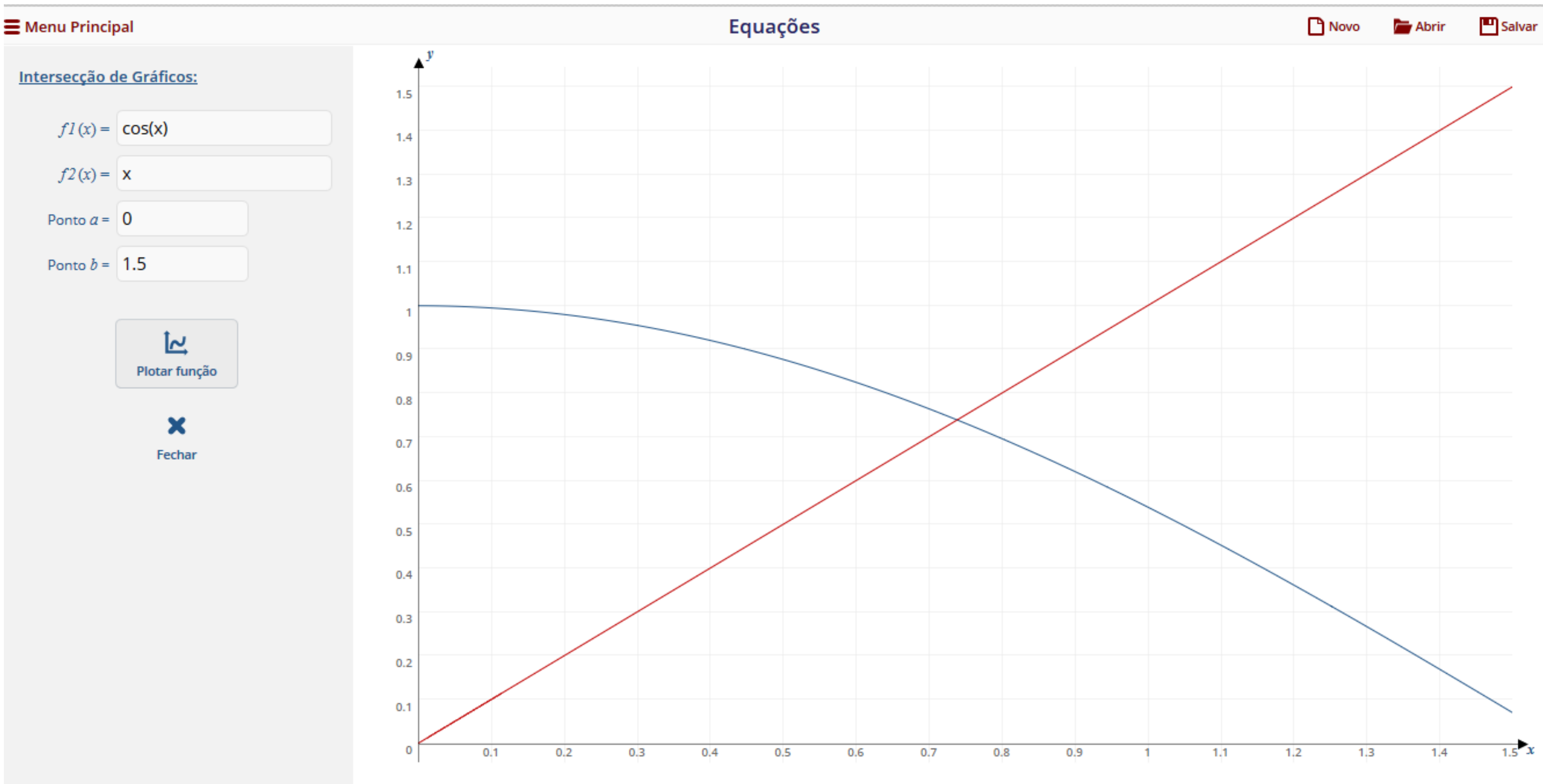



Menu Principal
Equações
Novo
Abrir
Salvar
Gráfico da Função:
f(x) = cos(x)-x
Ponto a = -1
Ponto b = 1
Plotar função
Fechar
y
x
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-1
-0.8
-0.6
-0.4
-0.2
0.2
0.4
0.6
0.8
1

Assim, podemos escolher I=[0,1] ou I=[0.4,1.0] , por exemplo.



- **Plotar os gráficos das duas funções: x e cos(x), e ver em que ponto se cruzam.**



Que confirma a posição da raiz e as escolhas dos intervalos anteriores.

❑ Método da Bissecção: usar o Teorema do valor intermediário

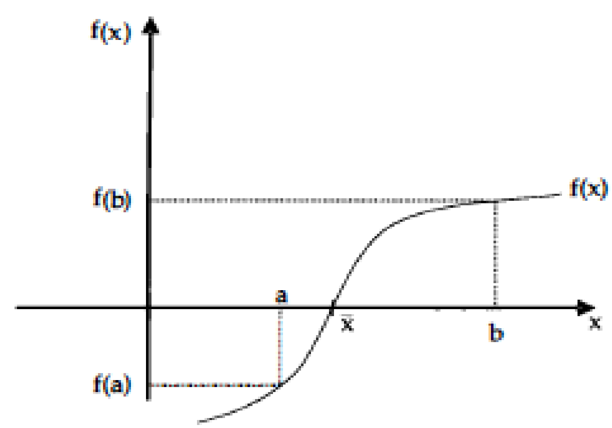


Figura 3.1

f(x)=cos(x)-x

x	f(x)
-3	2.01
-2	1.584
-1	1.54
0	1
1	-0.46
2	-2.416
3	-3.99

Ideias: se você não tem como plotar o gráfico, então você pode:

1. Escolher um intervalo inicial I=[a,b] e verificar se f(a).f(b)<0.
2. Se f(a).f(b)>0 escolha outro intervalo.
3. E assim por diante.

Ou ainda: você pode calcular vários valores para f(x), usando uma calculadora ou planilha eletrônica, para identificar onde muda de sinal.

Ou ainda: fazer um estudo da função, como visto em Cálculo I.

Reescrever

Algoritmo 3.1

1. Dados $\varepsilon > 0$, o intervalo inicial $[r_0, s_0]$ que contenha a raiz, isto é, $f(r_0)f(s_0) < 0$. Faça Pare = Falso, i = 0.

2. Enquanto Pare = Falso, faça

   2.1 Determine $x_i = (r_i + s_i)/2$.

   2.2 Se $|f(x_i)| \leq \varepsilon$, então Pare = Verdade.
   Senão
   Se $f(r_i)f(x_i) < 0$, então $r_{i+1} = r_i$ e $s_{i+1} = x_i$
   Senão $r_{i+1} = x_i$ e $s_{i+1} = s_i$

   2.3. Se $\dfrac{|x_{i+1} - x_i|}{|x_{i+1}|} < \varepsilon$, então Pare = Verdade
   Senão i = i + 1

O Método da Bissecção também é usado para encontrar raízes da equação.

Para ε=0.01 temos os valores e a raiz encontrada.

Menu Principal

Equações

Novo Abrir Salvar

Escolha o método de resolução:

Bisseção Aproximação Sucessivas Newton Secantes

Restaurar resolução

Iter.	r_i	s_i	x_i	Erro
0	0.0000	1.0000	0.5000	
1	0.5000	1.0000	0.7500	0.3333
2	0.5000	0.7500	0.6250	0.2000
3	0.6250	0.7500	0.6875	0.0909
4	0.6875	0.7500	0.7188	0.0435
5	0.7188	0.7500	0.7344	0.0213
6	0.7344	0.7500	0.7422	0.0105
7	0.7344	0.7422	0.7383	0.0053

Raiz encontrada:

$\bar{x} = 0.7383$

$|f(\bar{x})| = 0.0013$

Certifique se $\bar{x}$ é a raiz da equação!

Para ε=0.001 temos os valores e a raiz encontrada.

☰ Menu Principal | Equações | Novo | Abrir | Salvar

Escolha o método de resolução:

Bisseção | Aproximação Sucessivas | Newton | Secantes | Restaurar resolução

Iter.	r_i	s_i	x_i	Erro
0	0.0000	1.0000	0.5000	
1	0.5000	1.0000	0.7500	0.3333
2	0.5000	0.7500	0.6250	0.2000
3	0.6250	0.7500	0.6875	0.0909
4	0.6875	0.7500	0.7188	0.0435
5	0.7188	0.7500	0.7344	0.0213
6	0.7344	0.7500	0.7422	0.0105
7	0.7344	0.7422	0.7383	0.0053
8	0.7383	0.7422	0.7402	0.0026
9	0.7383	0.7402	0.7393	0.0013
10	0.7383	0.7393	0.7388	0.0007

Raiz encontrada:

$\bar{x} = 0.7388$

$|f(\bar{x})| = 0.0005$

Certifique se $\bar{x}$ é a raiz da equação!

3. Usando o método da bisseção, determine uma raiz das funções a seguir com a precisão $\varepsilon = 0.0001$:

a) $f(x) = x^3 - sen(x)$

b) $f(x) = 3x - cos(x) + 1$

c) $f(x) = ln(x) - sen(x)$

Segundo Passo: encontrar a função iterativa.

- Agora temos que encontrar uma função interativa $\phi(x)$, tal que a sequência

$$x_0, x_1 = \phi(x_0), x_2 = \phi(x_1), \cdots, x_n = \phi(x_{n-1}), \cdots$$

converge para a raiz procurada.

Ideias

- Para resolver uma equação $f(x) = 0$ podemos usar a ideia de "ponto fixo".
- Ponto fixo de uma função $g(x)$ é um ponto $\bar{x}$ tal que $g(\bar{x}) = \bar{x}$.
- Para resolver $f(x) = \cos(x) - x = 0$ podemos resolver a equação $x = \phi(x)$, onde $\phi(x) = cos(x)$.
- Então, se encontrarmos $\bar{x}$ tal que $\phi(\bar{x}) = cos(\bar{x}) = \bar{x}$, teremos $f(\bar{x}) = \cos(\bar{x}) - \bar{x} = 0$,
- Ou seja, além de ser o ponto fixo de $\phi(x)$, $\bar{x}$ também é a raiz procurada para $f(x) = 0$.

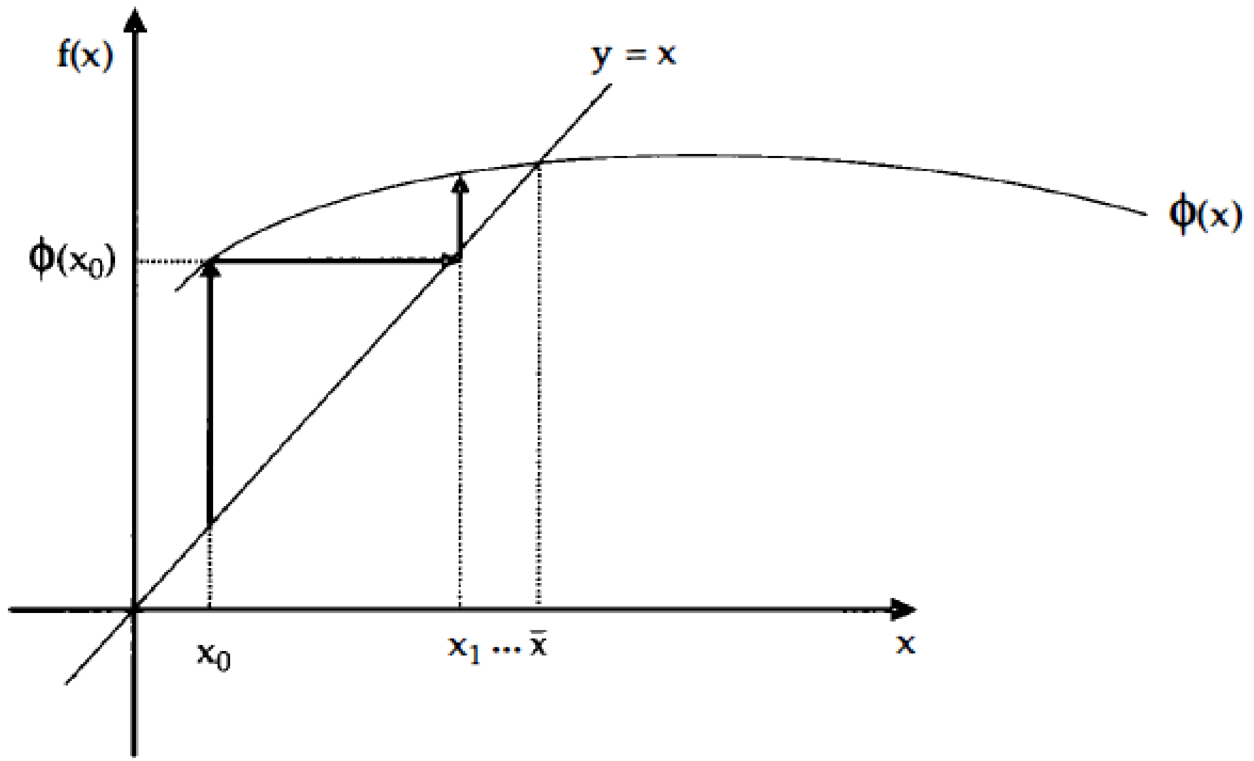
$x_0 \rightarrow$ solução inicial

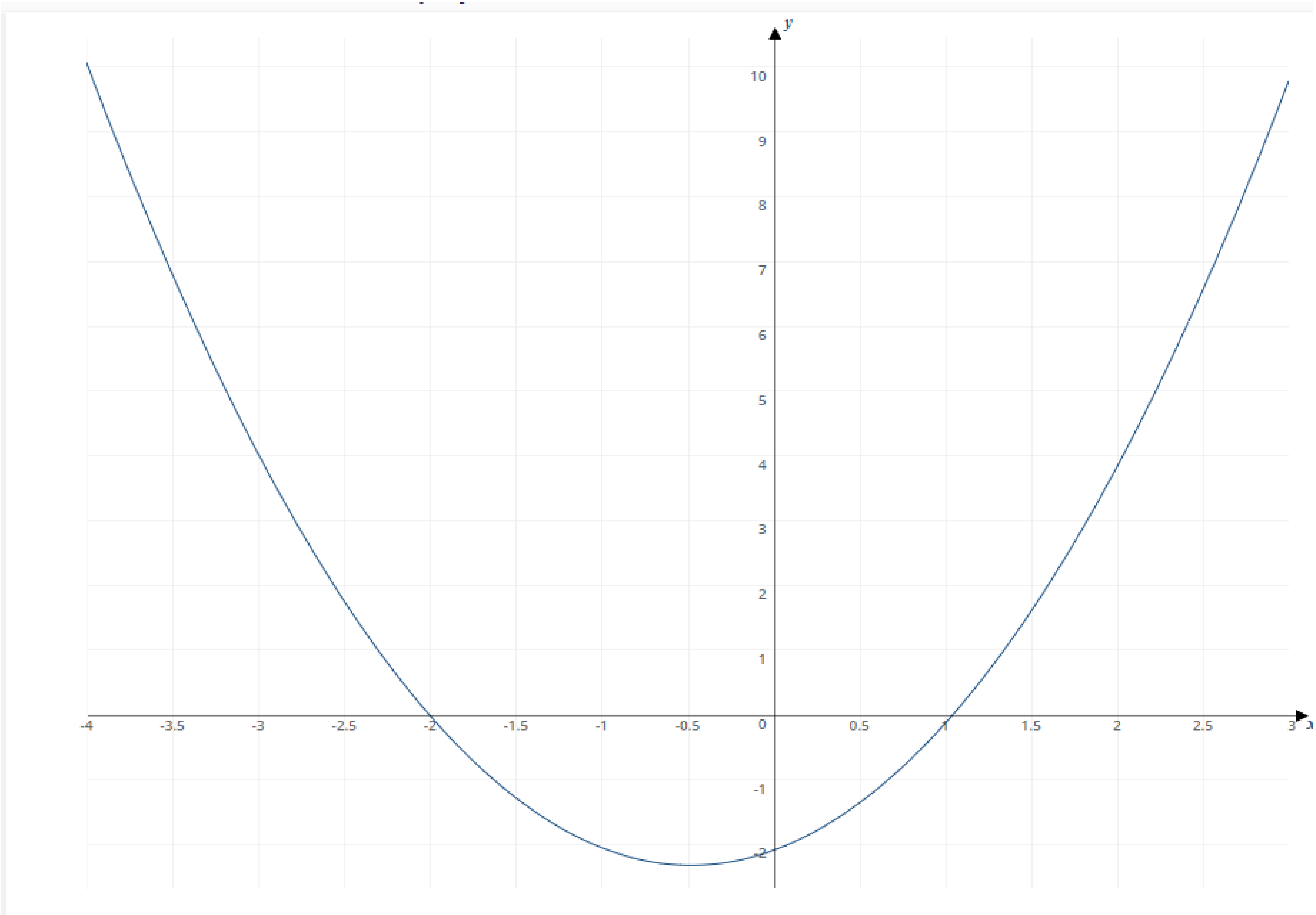
$x_1 = \phi(x_0)$

$x_2 = \phi(x_1)$

$\vdots$

$x_{k+1} = \phi(x_k)$




y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-4
-3.5
-3
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0.5
1
1.5
2
2.5
3
x

Forneça a função de iteração:

$\phi(x) =$ x^2+1.96*x-2.08

Solução inicial:

$x_0 =$ 0.8

Precisão ε:

ε = 0.01

Iter.	x_i	$\phi(x_i)$	Erro
0	0.8000	0.1280	
1	0.1280	-1.8127	5.2500
2	-1.8127	-2.3470	1.0706
3	-2.3470	-1.1718	0.2276
4	-1.1718	-3.0036	1.0028
5	-3.0036	1.0545	0.6099
6	1.0545	1.0989	3.8483
7	1.0989	1.2816	0.0404
8	1.2816	2.0745	0.1425
9	2.0745	6.2894	0.3822
10	6.2894	49.8034	0.6702
11	49.8034	2575.9174	0.8737
12	2575.9174	6640397.0113	0.9807
13	6640397.0113	44094885482533.1875	0.9996
14	44094885482533.1875	1.9443589257178023e+27	1.0000
15	1.9443589257178023e+27	3.780531632018486e+54	1.0000
16	3.780531632018486e+54	1.429241942069236e+109	1.0000
17	1.429241942069236e+109	2.042732528969841e+218	1.0000

Forneça a função de iteração:

$\phi(x) =$ 2.08/(x+0.96)

Solução inicial:

$x_0 =$ 0.5

Precisão ε:

$\varepsilon =$ 0.01

Iter.	x_i	$\phi(x_i)$	Erro
0	0.5000	1.4247	
1	1.4247	0.8722	0.6490
2	0.8722	1.1352	0.6333
3	1.1352	0.9927	0.2317
4	0.9927	1.0652	0.1435
5	1.0652	1.0271	0.0680
6	1.0271	1.0468	0.0371
7	1.0468	1.0365	0.0188
8	1.0365		0.0099

Raiz encontrada:

$$\bar{x} = 1.0365$$

$$|f(\bar{x})| = 0.0106$$

Certifique se $\bar{x}$ é a raiz da equação!