2023 Aula 6 

⇒ 3 Sistemas de eq. lineares: métodos iterativos

(quando os métodos diretos não são possíveis, ex: limitação de memória).

⇒ processo iterativo: $\vec{x}^{(k)} = f(\vec{x}^{(k-1)})$

tal que $\lim_{k \to \infty} \| \vec{x}^{(k)} - \underbrace{\hat{\vec{x}}}_{\text{solução exata de } A\vec{x} = \vec{b}} \| = 0$ (convergência

- $\| \vec{x} \|$ → norma euclidiana do vetor $\vec{x}$

⇒ critérios de parada: (while)

atualizações
- erro absoluto: $\| \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)} \| < \varepsilon$
- erro relativo: $\dfrac{\| \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)} \|}{\| \vec{x}^{(k+1)} \|} < \varepsilon$

check
- resíduo: $\| \vec{b} - A\vec{x}^{(k)} \| < \varepsilon$

loop finito
- máximo de iterações $K_{max}$

$\textcircled{2}$

* Método de Gauss - Jacobi $\begin{cases} \text{Quarteroni: Jacobi} \\ \text{Franco: Jacobi - Richardson} \end{cases}$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

isola os $x$'s da diagonal principal

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = \left(b_1 - a_{12} x_2^{(k)} - a_{13} x_3^{(k)} - \dots - a_{1n} x_n^{(k)}\right) / a_{11} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = \left(b_n - a_{n1} x_1^{(k)} - a_{n2} x_2^{(k)} \dots - a_{n\,n-1} x_{n-1}^{(k)}\right) / a_{nn} \end{cases}$$

de forma equivalente (matricial):

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

"quebrar" em 2

$$A \vec{x} = \vec{b}$$

$$(A - D + D) \vec{x} = \vec{b}$$

$$(A - D) \vec{x}^{(k)} + D \vec{x}^{(k+1)} = \vec{b}$$

$$D \vec{x}^{(k+1)} = \vec{b} - (A - D) \vec{x}^{(k)}$$

$$\vec{x}^{(k+1)} = D^{-1} \vec{b} - D^{-1} (A - D) \vec{x}^{(k)}$$

$$\boxed{\vec{x}^{(k+1)} = (I - D^{-1} A) \vec{x}^{(k)} + D^{-1} \vec{b}}$$

- Critério de convergência: $\vec{x}^{(K+1)} = B\vec{x}^{(K)} + \vec{g}$

$\lim\limits_{K \to \infty} \| \vec{x}^{(K)} - \vec{x} \| = 0$ se e somente se $\rho(B) < 1$, onde

$\rho(B) \Rightarrow$ raio espectral de $B = \max\limits_{i=1...n} \{ |\lambda_i| \}$

onde $\lambda_i$ são os autovalores de $B$.

justificativa:

$$
\begin{array}{rcl}
\vec{x}^{(K+1)} & = & B\vec{x}^{(K)} + \vec{g} \\
- \quad \hat{\vec{x}} & = & B\hat{\vec{x}} + \vec{g} \\
\hline
\end{array}
$$

$$\underbrace{\vec{x}^{(K+1)} - \hat{\vec{x}}}_{\text{erro } \vec{e}^{(K+1)}} = B \underbrace{(\vec{x}^{(K)} - \hat{\vec{x}})}_{\text{erro } \vec{e}^{(K)}}$$

$$\vec{e}^{(K+1)} = B\,\vec{e}^{(K)}$$

matriz de iteração

raio espectral (autovalores) de $B \rightarrow$ indica o efeito máximo que a transf. linear $B$ tem no "tamanho" dos vetores

$$\| \vec{e}^{(K+1)} \| \leq \rho(B) \, \| \vec{e}^{(K)} \|$$

logo, se $\rho(B) < 1$, o erro diminui com $K \to \infty$.

* obs: os métodos iterativos <u>não</u> funcionam para qualquer matriz $A_{n \times n}$ tal que $A\vec{x} = \vec{b}$.

* Método de Gauss-Seidel: aceleração da convergência do método de Jacobi

$\Rightarrow$ no cálculo de $x_i^{(k+1)}$ $\begin{cases} x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)}, \dots, x_{i-1}^{(k+1)} \\ x_{i+1}^{(k)}, \dots x_n^{(k)} \end{cases}$

$A\vec{x} = \vec{b} \Rightarrow A = L + R$ $\begin{cases} L \rightarrow \text{triang esq. } \underline{\text{com}} \text{ diag. principal de } A \\ R \rightarrow \text{triang. direita } \underline{\text{sem}} \text{ diag. princ. de } A. \end{cases}$

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \rightarrow \quad (L+R)\vec{x} = \vec{b}$$

$$L\vec{x}^{(k+1)} + R\vec{x}^{(k)} = \vec{b} \qquad \boxed{\vec{x}^{(k+1)} = (-L^{-1}R\,\vec{x}^{(k)}) + L^{-1}\vec{b}}$$

de forma equivalente:

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - a_{13}x_3^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)})/a_{11} \\ x_2^{(k+1)} = (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - a_{23}x_3^{(k)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)})/a_{22} \\ \vdots \\ x_n^{(k+1)} = (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - a_{n2}x_n^{(k+1)} - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)})/a_{nn} \end{cases}$$

obs. • Gauss-Seidel: tende a ser mais rápido

• Gauss-Jacobi: paralelizável.