Matemática, Probabilidade e Estatística


Caqui
Carmen
Holandês
Tomate de Árvore
Momotaro
Italiano
Cereja
Sweet Grape
Débora

Variabilidade

A Natureza da Variabilidade

Existem muitas fontes de variabilidade nos dados.

Variabilidade das Medidas

Medições do mesmo indivíduo podem ser diferentes.

O dispositivo de medição não produz resultados confiáveis. Por exemplo, como quando tentamos medir uma grande distância com uma pequena régua.

Em outras ocasiões, os resultados dependem de alterações do sistema. Por exemplo, a pressão arterial registrada pode diferir de um momento para o outro.

Variabilidade Natural

Variabilidade é inerente à natureza.

- Os indivíduos são diferentes. Quando medimos a mesma grandeza em vários indivíduos, somos "obrigados" a obter diferenças nas medições. Embora em alguns casos isto pode ser devido ao instrumento de medição, mas no geral é simplesmente devido ao fato dos indivíduos diferirem.
- As pessoas naturalmente têm diferentes alturas, aptidões habilidades, opiniões diferentes e respostas emocionais.
- Sementes diferentes para a mesma variedade de feijão vão crescer em tamanhos diferentes, quando submetidas ao mesmo meio ambiente, porque não há duas sementes que são exatamente iguais;

Variabilidade Amostral

Por exemplo, em uma pesquisa de opinião política, parece razoável usar a proporção de votantes pesquisados como uma estimativa da proporção desconhecida de todos os eleitores que apoiam um determinado candidato.

Mas, se uma segunda amostra do mesmo tamanho é usada, é quase certo que não seria exatamente a mesma proporção de eleitores pesquisados que apoiam ao mesmo candidato.

O valor da proporção irá variar de amostra para amostra. Isso é chamado de variabilidade amostral.

Variabilidade Induzida

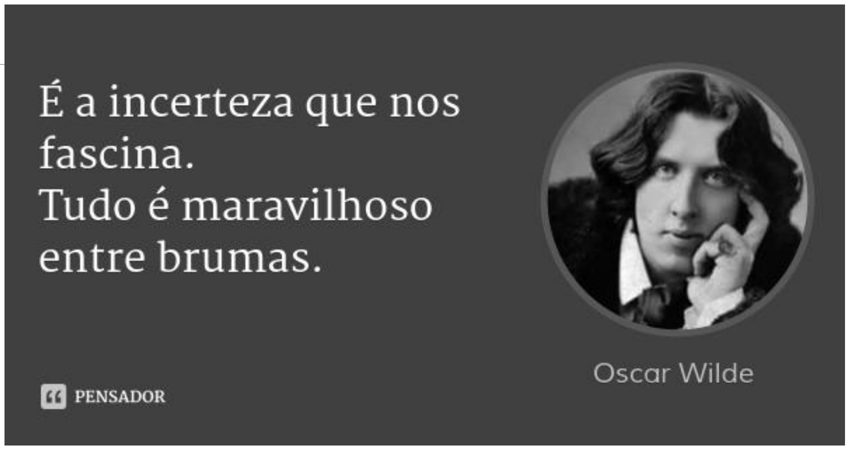
- Se plantamos um pacote de sementes de feijão em um campo, e um outro pacote numa outra localização com um clima haverá uma diferença observada no crescimento que pode ser devida a diferenças inerentes nas sementes (variabilidade natural), ou a observada diferença pode ser devido ao fato de os locais não são os mesmos.

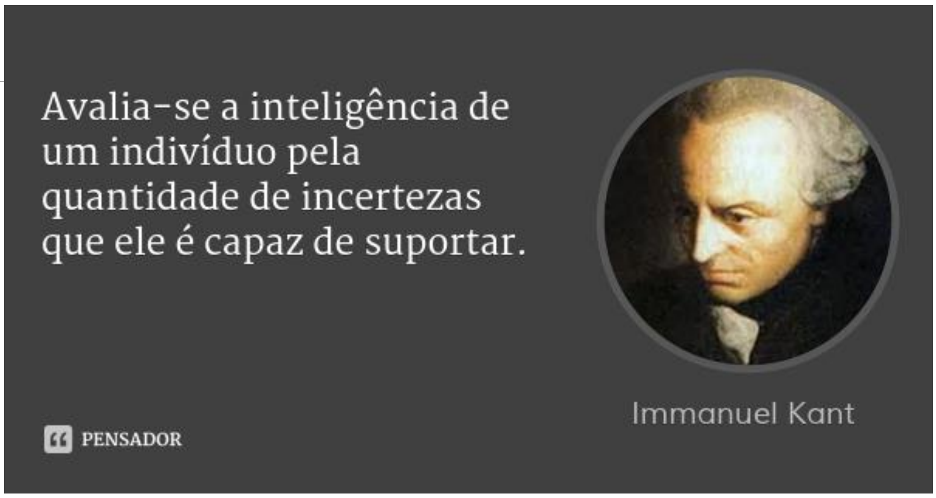
Variabilidade Induzida

- Se um tipo de fertilizante é utilizado em local e um outro tipo em outro as diferenças na produção podem ser devido à diferença nos adubos.
- Mas diferença observada pode ser devida fatores que não conhecemos, por isso um experimento deve ser planejamos para a determinar os efeitos de diferentes fatores e tentar diminuir ou quantificar a variabilidade existente.

"Os homens preferem geralmente o engano, que os tranquiliza, à incerteza, que os incomoda."

MARQUES DE MARICÁ (1773-1848)


É a incerteza que nos fascina.
Tudo é maravilhoso entre brumas.
Oscar Wilde
PENSADOR


Avalia-se a inteligência de um indivíduo pela quantidade de incertezas que ele é capaz de suportar.
Immanuel Kant
PENSADOR

- **in·cer·to (latim incertus, -a, -um)**

- adjetivo
  1. Não certo; que transmite dúvidas. = DUVIDOSO
  2. Que não é seguro. = VACILANTE
  3. Contingente; aleatório.
  4. Indeciso, irresoluto, hesitante.
- substantivo masculino
  5. O que não é certo; o que é duvidoso.
- Confrontar: inserto.

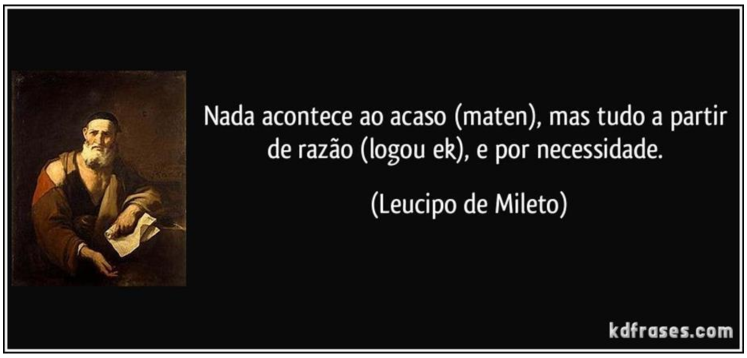
- "incerto", in Dicionário Priberam da Língua Portuguesa [em linha], 2008-2013, http://www.priberam.pt/dlpo/incerto [consultado em 04-04-2016].

Fenômenos Aleatórios

- Segundo Poincaré (1936), os filósofos clássicos diferenciavam os fenômenos que pareciam obedecer a leis conhecidas e os aleatórios, que não podiam ser previstos, porque eles se rebelaram contra qualquer lei.
- A aleatoriedade também tinha um significado preciso, o que era aleatório para um o era aleatório para qualquer outro.

Fenômenos Aleatórios

- Outra interpretação é assumir que todo fenômeno tem uma causa e que o acaso é por causa da nossa ignorância.



Fenômenos Aleatórios

- Esta é uma interpretação subjetiva, porque o que é aleatório para uma pessoa pode não ser para outra mais experiente:
- "O acaso é apenas a medida de nossa ignorância. Fenômenos fortuitos são, por definição, aqueles cujas leis ignoramos". (Poincaré, 1936, pg. 69 da reprodução no livro de Newmann).

- Esta interpretação não é adequada decorre da existência de fenômenos determinísticos, mas cuja lei desconhecemos, como a morte e outros fenômenos aleatórios, como a transmissão de traços genéticos que tem causas conhecidas.

Fenômenos Aleatórios

- Os fenômenos aleatórios são aqueles que podermos aplicar o cálculo de probabilidades, o qual que permanecerá válido ainda quando encontramos suas regras ou leis.
- É precisamente a complexidade ou multiplicidade das causas que muitas vezes determina um resultado aleatório.

- Atividade. Como aleatoriedade está presente em jogos, narrativas e atividades infantis?
- Atividade. Estudo cultural sobre algumas crenças infundadas sobre a possibilidade de controle da aleatoriedade?

Thor

"Thor é o deus do trovão, das tempestades e da agricultura da mitologia nórdica. Reconhecido pelos historiadores como o deus mais popular e poderoso entre os nórdicos da Era Viking (793 a 1066)

Veja mais sobre "Thor" em: https://brasilescola.uol.com.br/mitologia/thor.htm tem seu origem na cultura germânica.

https://www.mitoselendas.com.br/2020/08/thor-o-deus-nordico-dos-trovoes-e-das.html

Iansã

a senhora das tempestades e ventanias

http://www.mulheresdeluta.com.br/iansa-a-senhora-das-tempestades-e-ventanias/

Concepção clássica

- A noção de aleatoriedade tem sido associada a diferentes concepções de probabilidade (Ver Godino, Batanero e Canizares, 1987).
- Em uma concepção clássica, a probabilidade de um evento é a "razão entre o **número de casos favoráveis para evento e o número de casos possíveis**, desde que todos ssejam igualmente prováveis”.

Concepção clássica

Neste sentido de probabilidade, consideramos que um objeto (ou evento) é um membro aleatório de uma determinada classe de objetos (pessoas), se a probabilidade de obter esse objeto (em uma loteria ou outro experimento) é o mesmo que qualquer outro membro da sua classe.

Concepção clássica

Definição circular.

Eventos não equiprováveis.

Concepção frequentista

Podemos considerar que um objeto é um membro aleatório de uma classe, se pudermos escolher, por um método que dê a cada membro da classe, uma determinada relativa frequência "a priori" após um certo número de realizações.
Tem-se o problema teórico de decidir quantos experimentos são necessários para considerar que, a partir deste número, teríamos suficientemente testado a natureza aleatória do objeto.

Esta definição da probabilidade não fornece mais um valor exato de probabilidade, mas apenas uma estimação desta.

Concepção subjetiva

- Kyburg (1974) indica que a idéia de aleatoriedade é composta de quatro termos:
  • o objeto se supõe ser membro aleatório de uma classe;
  • o conjunto do qual o objeto é um membro aleatório (população ou grupo);
  • a propriedade segundo a qual o objeto é um membro aleatório da classe dada;
  • conhecimento da pessoa que decide se o objeto é aleatório e lhe atribui uma probabilidade.

Concepção subjetiva

- Na concepção subjetiva da probabilidade, pela qual todas as probabilidades são condicionais à informação que pode mudar nossa opinião sobre a aleatoriedade ou a probabilidade de um evento.

Brasil x Argentina
VídeoSérie: Matemática na Escola

http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1056

- Atividade

Indique em que situações podem ser consideradas aleatórias, e em caso afirmativo qual concepção pode ser aplicada

1. Germinação de uma semente plantada com cuidado.
2. O resultado obtido num dado que eu lancei e posso ver mas você não.
3. O número ganhador da loteria no próximo mês.
4. A cor da próxima blusa que comprará.
5. Se choveu em Melbourne em 3 de Agosto passado.
6. Se choverá em Melbourne em 3 de Agosto próximo.
7. Que tenhas gripe este ano.
8. Que está exposto a ter gripe este ano.
9. O resultado de lançar uma moeda, se foi lançada 10 vezes e obtive 10 caras.

Espaço Amostral (Ω): conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório.

Exemplos:

1. Lançamento de um dado.
   $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

2. Sexo.
   Ω = {Macho, Femea}

3. Tempo de duração de um celular.
   $\Omega = \{t: t \geq 0\}$

Eventos: ocorrências do experimento aleatório / subconjuntos do espaço amostral Ω

Notação: A, B, C, ...

$\varnothing$ (conjunto vazio): ***evento impossível***

Ω: ***evento certo***

Exemplo: Lançamento de um dado.

Espaço amostral: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Alguns eventos:

A: sair face par $\quad A = \{2, 4, 6\} \subset \Omega$

B: sair face maior que 3 $\quad B = \{4, 5, 6\} \subset \Omega$

C: sair face 1 $\quad C = \{1\} \subset \Omega$

30

Composição de eventos

Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral.

$A \cup B$: união dos eventos A e B.

Representa a ocorrência de pelo menos um dos eventos, A ou B.

$A \cap B$: interseção dos eventos A e B.

Representa a ocorrência simultânea dos eventos A e B.

• A e B são disjuntos ou mutuamente exclusivos quando não têm elementos em comum, isto é

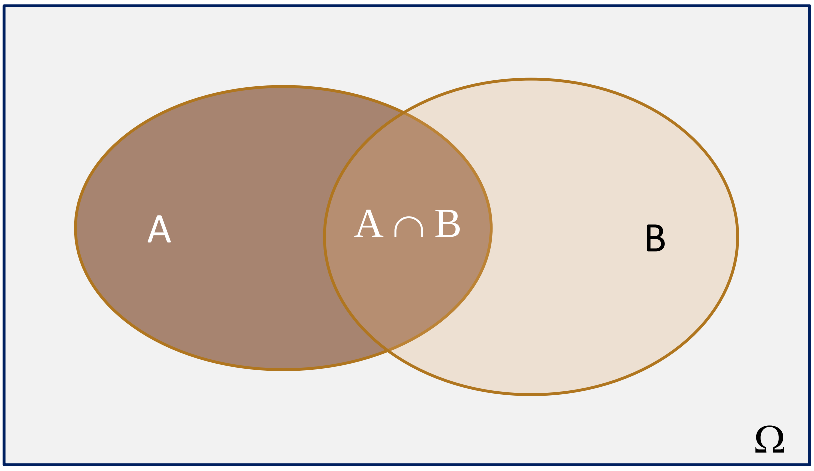
$$A \cap B = \varnothing$$

• A e B são complementares se sua interseção é vazia e sua união é o espaço amostral, isto é,

$$A \cap B = \varnothing \quad \text{e} \quad A \cup B = \Omega$$

O evento complementar de A, representado por A^c, é o evento em que A não ocorre.

Diagrama de Venn



Probabilidade

- Medida da incerteza associada aos eventos / resultados do experimento aleatório

Vamos atribuir probabilidade aos elementos do espaço amostral. Como?

Várias abordagens possíveis:

1. Frequências relativas de ocorrências de cada resultado;
2. Suposições teóricas;
3. Experiência de especialista.

Atribuição da probabilidades:

1. Através das frequências relativas de ocorrências.

- O experimento aleatório é replicado várias vezes;
- Registra-se a frequência relativa com que o resultado em questão ocorre.

→ Para um número grande de replicações, a frequência relativa de ocorrências do resultado aproxima a probabilidade de ocorrência daquele resultado.

Exemplo: N lançamentos de um dado:

Resultado	1	2	3	4	5	6	N
Frequências relativas	0,180	0,180	0,200	0,130	0,130	0,180	100
	0,170	0,171	0,164	0,148	0,175	0,172	1000
	0,163	0,166	0,174	0,162	0,170	0,166	10000

2. Através de suposições teóricas.

Exemplo: Lançamento de um dado

Admite-se que o dado é perfeitamente equilibrado

P(face 1) = ⋯ = P(face 6) = 1/6.

3. Através da experiência de um(a) especialista.

Exemplo: Após exame clínico, o médico externa a probabilidade de que o paciente esteja com sinusite viral (em vez de bacteriana).

No *caso discreto*, todo experimento aleatório tem seu *modelo probabilístico* especificado quando estabelecemos:

- O *espaço amostral* $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$
- A *probabilidade $P(\omega)$ para cada ponto amostral* de tal forma que:

$$0 \leq P(\omega_i) \leq 1 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{\infty} P(\omega_i) = 1.$$

- Neste caso, dado um evento A do experimento aleatório (lembre qu $A \subset \Omega$), temos

$$P(A) = \sum_{\omega_j \in A} P(\omega_j)$$

Observação: Na situação de equiprobabilidade, isto é, quando as probabilidades de todos os resultados são iguais, temos:

$$P(A) = \frac{n^o.\ de\ elementos\ de\ A}{n^o.\ de\ elementos\ de\ \Omega}$$

Atenção: Sem equiprobabilidade, a expressão acima NÃO é válida.

QUESTÃO 180

Em uma central de atendimento, cem pessoas receberam senhas numeradas de 1 até 100. Uma das senhas é sorteada ao acaso.

Qual é a probabilidade de a senha sorteada ser um número de 1 a 20?

A) $\frac{1}{100}$

B) $\frac{19}{100}$

C) $\frac{20}{100}$

D) $\frac{21}{100}$

E) $\frac{80}{100}$

enem 2015

Regra da adição de probabilidades

Sejam A e B eventos de Ω. Então,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Casos particulares:

- Se A e B forem ***eventos disjuntos***, então
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$
- Para qualquer evento A de Ω,
$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Probabilidade condicional e independência

Probabilidade condicional: Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é denotada por P(A | B) e definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0 .$$

Da definição de probabilidade condicional, obtemos a regra do produto de probabilidades

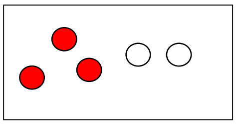
$$\boxed{P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B).}$$

e

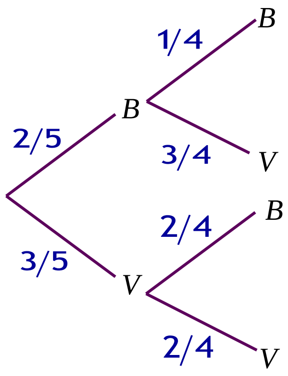
$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A) .}$$

Exemplo: Em uma urna, há 5 bolas: 2 brancas e 3 vermelhas. Duas bolas são sorteadas sucessivamente, *sem reposição*.

A: 2ª. bola sorteada é branca
C: 1ª. bola sorteada é branca
P(A) = ???



Para representar todas as possibilidades, utilizamos, um diagrama conhecido como ***diagrama de árvores*** ou ***árvore de probabilidades***.

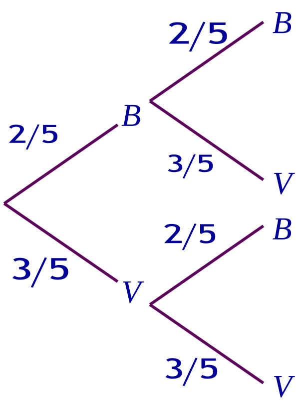


Resultados	Probabilidades
BB	$\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{2}{20}$
BV	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{4}=\frac{6}{20}$
VB	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}$
VV	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}=\frac{6}{20}$
Total	1

$$P(A)=\frac{2}{20}+\frac{6}{20}=\frac{2}{5} \quad \text{e}$$

$$P(A|C)=\frac{1}{4}\ .$$

Considere agora que as extrações são feitas ***com reposição***, ou seja, a 1ª. bola sorteada é reposta na urna antes da 2ª. extração. Nesta situação, temos



Resultados	Probabilidade
BB	$\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{25}$
BV	$\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{25}$
VB	$\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}=\frac{6}{25}$
VV	$\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{9}{25}$
Total	1

Independência de eventos

Dois eventos A e B são independentes se a informação da ocorrência (ou não) de B não altera a probabilidade de ocorrência de A, isto é,

$$\boxed{P(A \mid B) = P(A), \quad P(B) > 0.}$$

Temos a seguinte forma equivalente:

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)\ .}$$

Exemplo: A probabilidade de Jonas ser aprovado no vestibular é 1/3 e a de Madalena é 2/3. Qual é a probabilidade de ambos serem aprovados?

A: Jonas é aprovado

B: Madalena é aprovada

$P(A \cap B) = P(A) \text{ x } P(B) = 1/3 \text{ x } 2/3 = 2/9$

$\rightarrow$ Qual foi a suposição feita?

Observação

Segue da definição de independência que se dois eventos A e B são independentes, então são independentes também os pares de eventos

$$A^c \text{ e } B\,,\ \ A \text{ e } B^c\,,\ \ A^c \text{ e } B^c\,.$$

Probabilidade condicional: Dados dois eventos A e B, a probabilidade condicional de A dado que ocorreu B é denotada por $P(A \mid B)$ e definida por

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0\,.$$

Exemplo: A probabilidade de que uma pessoa venha a contrair hepatites C dado que ele/ela fez uso de drogas injetáveis.

Probabilidade Condicional

Um erro comum é não reconhecer a diferença entre a $P(A \mid B)$ e $P(A)$; a probabilidade de ter a doença dado que o resultado do teste positivo foi positivo se pensa ser a mesma que a probabilidade de ter a doença (a prevalência) .

Probabilidade Condicional

Um erro comum é confundir $P(A \mid B)$ com $P(B \mid A)$, de modo que, por exemplo, **a probabilidade condicional de doença dado um teste positivo de diagnóstico** (o *poder preditivo positivo de um teste*) é pensado para ser o mesmo que **a probabilidade condicional de um teste positivo de diagnóstico dada a doença** (*a sensibilidade do ensaio*).

Probabilidade condicional

Eventos sequenciais

Falácia da Defesa

O astro do futebol americano e ator O.J. Simpson fora acusado de matar sua mulher Nicole Brown e o amigo dela Ronald Goldman.

Um dos argumentos fortes do promotor público era que Simpson batia em Nicole e que agressores desse tipo costumam chegar ao assassinato.

Na defesa, o renomado advogado Alan Dershowitz, usando um argumento estatístico falacioso (falácia do defensor nesse caso), convenceu os jurados. [*]

[*] Mlodinow, Leonard, (2008*). O andar do bêbado. Como o acaso determina nossas vidas.* Ed Zahar.

Falácia da Defesa

Segundo ele, uma vez que é baixíssima a proporção (1 em 2.500 ou 0,04 %) das mulheres espancadas pelos seus maridos-namorados serem depois assassinadas pelo seu agressor, o argumento do promotor era estatisticamente irrelevante. Dershowitz sabia o que estava fazendo...

P (Assassinada | Vítima do Agressor)

Falácia da Defesa

Uma vez que Nicole foi assassinada, a pergunta correta seria:

se uma mulher foi assassinada, qual é a probabilidade de que tenha sido vítima de assassinato pelo seu agressor?

E não qual é a probabilidade que uma mulher vitima de violência seja assassinada.

Na lógica correta para o caso, a situação muda radicalmente, pois 90% das mulheres assassinadas nos EUA são vítimas de seu agressor.

P (Vítima do Agressor | Assassinada)