Lista 2

MAT0120 - Álgebra I para a Licenciatura

1º semestre de 2023

1. Sejam a, b, c inteiros, prove:
   a) $a^2 - ab + b^2 \geq 0$
   b) $a < b \iff a^5 < b^5$
   c) $a + a + \cdots + a = 0 \iff a = 0$
   d) $a^2 + 1 \neq 0$

2. Seja $N^* = \{a \in \mathbb{Z} \ : \ a > 0\}$. Prove:
   a) $a \in N^*$ e $b \in N^* \Rightarrow a + b \in N^*$.
   b) $a \in N^*$ e $b \in N^* \Rightarrow ab \in N^*$.
   c) Para todo inteiro $x \neq 0$, vale $x \in N^*$ ou $-x \in N^*$.

3. Assuma que temos um conjunto não vazio X com uma operação $(+)$ que satisfaz:
   a) é associativa;
   b) tem elemento neutro;
   c) todo elemento x tem um oposto $(-x)$;
   d) é comutativa.

   A operação é tal que X tem um subconjunto satisfazendo a), b) e c). Definimos em X uma relação $\leq$, que significa, se $a \leq b$, então $a = b$ ou $b - a \in P$.

   Prove que $\leq$ é uma relação de ordem compatível com a operação $(+)$. Isto é, $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.

4. Em N^* definimos a relação $a \mid b$ se, e somente se, existe $c \in N^*$ tal que $b = ac$. Prove que essa é uma relação de ordem. Exiba um exemplo mostrando que essa relação não é uma relação de ordem total.

5. Prove que as seguintes fórmulas são verdadeiras para todo inteiro n, com $n > 0$.
   a) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2$
   b) $(1 - \frac{1}{2}) \cdots (1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{n+1}$
   c) $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$
   d) $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$

6. Determine o erro da seguinte "demonstração".

   Afirmação: Todo subconjunto finito tem um único elemento.

   Prova: $P(1)$ é verdadeiro.
   Suponha que $n \geq 1$ e $P(n)$ é verdadeira. Considere $A_{n+1} = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$. Por indução, o conjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$ tem 1 elemento. Logo, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. O conjunto $\{a_2, \ldots, a_{n+1}\}$ tem 1 só elemento. Logo, $a_2 = a_3 = \cdots = a_n = a_{n+1}$.
   Portanto, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a_{n+1}$ e o resultado segue por indução.

7. Prove que o número de subconjuntos de um conjunto com n elementos é 2^n.

8. Seja $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ uma função tal que satisfaz as seguintes propriedades:
   i) $f(1) = 1$;

ii) $f(a+b) = f(a) + f(b)$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$.

Prove que fé a função identidade.

9. Em casa uma das proposições diga o que é hipótese e o que é tese:

   a) 4 é par somente se 3 é primo.
   b) Se 4 é par, então 3 é primo.
   c) Se 3 é primo, então 4 é par.
   d) Para 3 ser primo é suficiente que 4 seja par.

10. Prove que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é $\frac{n(n-3)}{2}$.

11. Sejam a, b inteiros prove que:

    a) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
    b) $(a^m)^n = a^{mn}$.
    c) $n! > n^2$ se $n \geq 4$.
    d) $n! > n^3$ se $n \geq 6$.