Lista de Exercícios de SMA0301-Cálculo I - Módulo 2

Limite de uma função e Propriedades dos limites

Exercício 1 *Se* $f(1) = 2$, $\lim_{x\to 1} f(x)$ *deve existir? Em caso afirmativo, deve ser* $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$*? Podemos concluir algo sobre* $\lim_{x\to 1} f(x)$*? Explique e faça um desenho.*

Exercício 2 *Determine os seguintes limites.*

(a) $\displaystyle\lim_{t\to -1} \frac{t^2+3t+2}{t^2-t-2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{x}$

Exercício 3 *Suponha que* $\lim_{x\to c} f(x) = 5$ *e* $\lim_{x\to c} g(x) = -2$*. Determine:*

(a) $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$

(b) $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x)$

(c) $\lim_{x\to c} (f(x)+g(x))$

(d) $\lim_{x\to c} (f(x)+3g(x))$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{f(x)-g(x)}$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$

Exercício 4 *Explique por que o limite* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}$ *não existe.*

Exercício 5 *Uma bola é atirada no ar com velocidade de* $10m/s$*. Sua altura em metros após* t *segundos é dada por* $y = 10t - 4,9t^2$*.*

(a) Encontre a velocidade média para o período de tempo que começa quando $t = 1,5s$ *e dura*

(i) $0,5s$.

(ii) $0,1s$.

(iii) $0,05s$.

(iv) $0,01s$.

(b) Estime a velocidade instantânea quando $t = 1,5s$.

Teorema do Confronto

Exercício 6 *Seja* f *uma função definida em* $\mathbb{R}$ *tal que para todo* $x \neq 1$,

$$-x^2 + 3x \leq f(x) < \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Calcule $\lim_{x \to 1} f(x)$ *e justifique.*

Exercício 7 *Sejam* f *e* g *funções com mesmo domínio* A *tais que* $\lim_{x \to p} f(x) = 0$ *e* $|g(x)| \leq M$ *para todo* x *em* A, *onde* $M > 0$ *é um número real fixo. Prove que*

$$\lim_{x \to p} f(x)g(x) = 0$$

Exercício 8 *Calcule, caso exista* $\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$, *onde* f *é dada por*

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

(b) $f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}(\frac{1}{x}) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

Dica: *Item (a) é teorema do confronto.*

Exercício 9 *Prove que:*

(a) $\lim_{x \to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to a} |f(x)| = 0$

(b) $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0 \Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{|h|} = 0$

Exercício 10 *Empregue o Teorema do Confronto para mostrar que*

$$\lim_{x \to 0} \sqrt{x^3 + x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) = 0.$$

Exercício 11 *Se* $4x - 9 \leq f(x) \leq x^2 - 4x + 7$ *para* $x \geq 0$, *encontre* $\lim_{x \to 4} f(x)$.

Limite Fundamental e Limites Trigonométricos

Exercício 12 *Calcule.*

(a) $\lim_{x \to 0} \frac{\tan(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}$

(b) $\lim_{x \to 0} (1 - x) \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{x - x\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(2x)}$

(d) $\lim_{x \to 0} \frac{x + \operatorname{sen}(x)}{x^2 - \operatorname{sen}(x)}$

Exercício 13 *Determine os limites nos seguintes exercícios.*

(a) $\lim_{\theta \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\sqrt{2\theta})}{\sqrt{2\theta}}$

(b) $\lim_{y \to \infty} \operatorname{sen}(y)$

(c) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x + \operatorname{sen}(x)}{2x}$

(d) $\lim_{\theta \to 0} \frac{1 - \cos(\theta)}{\operatorname{sen}(2\theta)}$

(e) $\lim_{\theta \to 0} \theta \cos(\theta)$

Definição formal de limite

Exercício 14 *Mostre, pela definição (usando ε's e δ's), que:*

(a) $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$ *(b)* $\lim_{x \to -2} (4x + 1) = -7$

Exercício 15 *Foi pedido a um torneiro mecânico que fabricasse um disco de metal circular com área de* 1000cm^2.

(a) Qual o raio do disco produzido?

(b) Se for permitido ao torneiro uma tolerância do erro de $\pm 5\text{cm}^2$ *na área do disco, quão próximo do raio ideal da parte (a) o torneiro precisa controlar o raio?*

(c) Em termos de definição ϵ, δ *de* $\lim_{x \to a} f(x) = L$, *o que é* x*? O que é* $f(x)$*? o que é* a*? O que é* L*? Qual valor de* ϵ *é dado? Qual o valor correspondente de* δ*?*

Exercício 16 *Mostre, pela definição (usando ε's e δ's), que a função* f *é continua no ponto dado:*

(a) $f(x) = -3x$ *em* $p = 1$; *(b)* $f(x) = \sqrt{x}$ *em* $p = 4$.

Limites e indeterminações

Exercício 17 *Limites do tipo* $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ *com o numerador e o denominador se aproximando de zero são chamados de* indeterminações do tipo $0/0$. *Eles são delicados porque não podemos aplicar a regra do quociente. Se* f *e* g *são polinômios, então* $f(a) = g(a) = 0$, *e portanto* $x = a$ *é uma raiz do numerador e do denominador. Deste modo, podemos fatorá-los na forma* $(x - a)p(x)$, *com* p *sendo um polinômio de grau menor. Em alguns casos, isso permite eliminar a indeterminação, como no exemplo abaixo*

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{6 - 2x} = \lim_{x \to 3} \frac{(x - 3)(x - 1)}{-2(x - 3)} = \lim_{x \to 3} \frac{x - 1}{-2} = \frac{2}{-2}.$$

(Observe que o limite é só na última passagem.) *Utilize a ideia acima para calcular os limites a seguir.*

(a) $\lim_{z \to 0} \frac{z^2 + 2z}{z}$ *(b)* $\lim_{x \to 2} \frac{2x^2 - 6x + 4}{2 - x}$ *(c)* $\lim_{t \to 1} \frac{t - 1}{t^3 - 1}$

Exercício 18 *Calcule o limite, se existir,*

$$\lim_{u\to 2}\frac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2}.$$

Exercício 19 *O limite trigonométrico fundamental nos diz que* $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}=1$. *Use esta informação para calcular os limites abaixo.*

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(6x)}{2x}$ *(b)* $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(5x)}{\operatorname{sen}(9x)}$ *(c)* $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}$

Dica: para o item (c), multiplique o numerador e o denominador por $(\cos(x)+1)$.

Exercício 20 *Suponha que* $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$. *Calcule:*

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{f(3x)}{x}$ *(b)* $\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{x}$ *(c)* $\lim_{x\to 1}\frac{f(x^2-1)}{x-1}$

Exercício 21 *Calcule:*

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x}$ *(b)* $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\operatorname{sen}(x)}$ *(c)* $\lim_{x\to \pi}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x-\pi}$

Exercício 22 *Calcule:*

(a) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)}{x}$ *(b)* $\lim_{x\to 0}\frac{7x}{6\operatorname{sen}(x)}$ *(c)* $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos(x)}{x-\frac{\pi}{2}}$

(d) $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x)-\operatorname{sen}(x)}{\tan(x)-1}$ *(e)* $\lim_{x\to 2}\frac{\tan(\pi x)}{x-2}$ *(f)* $\lim_{x\to p}\frac{\tan(x-p)}{x^2-p^2}, p\neq 0$

(g) $\lim_{x\to p}\frac{\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(p)}{x-p}$ *(h)* $\lim_{x\to p}\frac{\tan(x)-\tan(p)}{x-p}$ *(i)* $\lim_{x\to 0}\frac{13^x-8^x}{x}$

(j) $\lim_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}(x)}{x^2}$ *(k)* $\lim_{x\to \infty}\operatorname{arctg}(x^2-x^4)$ *(l)* $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[5]{x}-1}$

Exercício 23 *Algumas indeterminações do tipo 0/0 podem ser resolvidas usando-se o artifício de multiplicar o numerador e o denominador pelo conjugado de um deles, conforme o exemplo abaixo*

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{x}-2)}{(x-4)}\frac{(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}.$$

(Observe que o limite é só na última passagem.) *Utilize a ideia acima para calcular os limites a seguir.*

(a) $\lim_{x\to 9}\frac{2\sqrt{x}-6}{x-9}$ *(b)* $\lim_{x\to 7}\frac{5-\sqrt{4+3x}}{7-x}$ *(c)* $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}$

Exercício 24 *Calcule cada um dos limites abaixo.*

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x+2}{x^3-x^2+x-1}$ *(b)* $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$ *(c)* $\lim_{x\to 0^-} \frac{x\mathrm{sen}(x)}{1-\cos(x)}$

(d) $\lim_{x\to 0} x\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ *(e)* $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$ *(f)* $\lim_{x\to \pi} \frac{\mathrm{sen}(x-\pi)}{x-\pi}$

(g) $\lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}$

Dica: no último, use a identidade $(x^n-y^n)=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$, *para* $n\in\mathbb{N}$

(h) Quando você aprender o limite de derivada, responda quais destes limites acima são derivadas de alguma função $f(x)$. *E quem é* $f(x)$ *em cada caso em que isso acontecer?*

Exercício 25 *Calcule* $\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$, *em cada um dos casos:*

(a) $f(x)=x^2$ *(b)* $f(x)=3x+1$

Exercício 26 *Calcule* $\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, *em cada um dos casos:*

(a) $f(x)=\frac{1}{x}$ *(b)* $f(x)=\frac{1}{x^2}$

c) Por que os limites $\lim_{h\to 0} \frac{f(p+h)-f(p)}{h}$, *e* $\lim_{x\to p} \frac{f(x)-f(p)}{x-p}$, *possuem os mesmos resultados? Comprove esse fato para o exemplo em que* $f(x)=x^2$. *Justifique porque tem que dar igual de forma geral, independente da função. Qual a mudança de variável para se convencer disto?*

d) Você sabe o que estes limites do item (c) tem a ver com derivada? (Eles são limites de taxa de variação média e darão taxa de variação instântanea, justifique isso quando você tiver aprendido este fato.)

Exercício 27 *Sejam* $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, *com* $g(x)\neq 0$, $\forall\, x$. *Prove que, se*

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,,$$

então existe $\delta>0$ *tal que*

$$0<|x-p\,|<\delta \implies |f(x)|<|g(x)|\,.$$

Exercício 28 *Prove que*

$$(a)\quad \lim_{x\to p} f(x) = L \iff \lim_{x\to p}(f(x)-L) = 0 \iff \lim_{x\to p}|f(x)-L| = 0$$

$$(b)\quad \lim_{x\to p} f(x) = L \implies \lim_{x\to p}|f(x)| = |L|$$

e que a volta pode não valer se $L \neq 0$. *Faça desenhos para pensar. Dica: use Exercício 7.*

$$(c)\quad \lim_{x\to p} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to p}|f(x)| = 0$$

Faça desenhos para pensar.

Exercício 29 *(Teorema do Confronto) Calcule* $\lim_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}$ *sabendo que* $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é tal que*

$$|g(x)| \leq x^4, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Exercício 30 *(Teorema do Confronto) Sejam* a, b, $c \in \mathbb{R}$ *e suponha que*

$$|ax^2 + bx + c| \leq |x|^3, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Prove que devemos ter $a = b = c = 0$ *necessariamente.*

Exercício 31 *Mostre e verifique graficamente que*

(a) não existe $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ *(b) existe* $\lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$

Exercício 32 *Dê um exemplo de uma função* f *de maneira que* $\lim_{x\to p}|f(x)|$ *exista, mas* $\lim_{x\to p} f(x)$ *não exista.*

Exercício 33 *A afirmação*

$$\lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x) \implies f \text{ é contínua em } p$$

é verdadeira? Justifique.

Exercício 34 *(Limites no infinito) Calcule:*

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x^4-2x+1}{4x^4+3x+2}$; *(b)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2x^3+1}{x^4+2x+3}$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{3x+2}$; *(d)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}}$;

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+3}$; *(f)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x+3}\right)$;

Exercício 35 *Calcule:*

(a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5-x}{3+2x}$; *(b)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(2x-\sqrt{x^2+3}\right)$;

(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-1}\right)$; *(d)* $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{2x+1}{x^2+x}$;

(e) $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{2x+1}{x^2+x}$; *(f)* $\lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{3x-5}{x^2+3x-4}$;

(g) $\lim\limits_{x\to2^+} \dfrac{x^2-4}{x^2-4x+4}$; *(h)* $\lim\limits_{x\to-1^+} \dfrac{3x^2-4}{1-x^2}$;

(i) $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x^3-x^2}$

(j) Quais as assíntotas horizontais ou verticais de cada item? Dê as equações de tais assíntotas.

Exercício 36 *(Limites no infinito) Calcule:*

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\dfrac{1}{x}$; *(b)* $\lim\limits_{x\to+\infty} 4x^4-3x+2$; *(c)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{5+\dfrac{2}{x}}$.

Exercício 37 *(Limites no infinito) Calcule:*

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^6-7x+3}{4x^6+x+5}$ *(b)* $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7x^4+1}{x^5+6x+1}$ *(c)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+5}}{6x+1}$

(d) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[4]{x^4+6x-1}}{\sqrt{3x^2+4x+1}}$ *(e)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+7}$ *(f)* $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x+5}\right)$

(g) Quais as assíntotas horizontais de cada item? Dê as equações de tais assíntotas.

Exercício 38 *Seja* n *um inteiro positivo. Prove que* $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x}=+\infty$ *pela definição.*

Exercício 39 *(Limites no infinito) Calcule:*

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} x - \sqrt[3]{2+3x^3}$ *(b)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+\sqrt{x+3}}{2x-1}$

(c) Mostre que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$ *é diferente de* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}}{x}$.

Exercício 40 *Encontre*

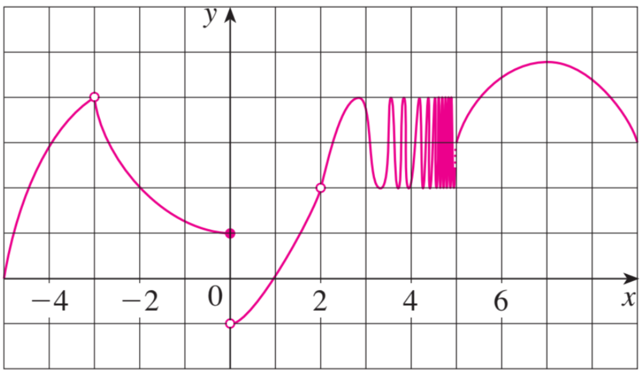
$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+ax} - \sqrt{x^2+bx})$$

ou demonstre que não existe.

Exercício 41 *Considere* $f(x) = \cos(x)$ *e* $g(x) = x\text{sen}(\frac{1}{x})$*. Calcule* $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$*. O que podemos dizer sobre* $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Exercício 42 *Para a função* h *cujo gráfico é dado, diga o valor da cada quantidade, se ela existir. Se não existir, explique por quê.*

(a) $\lim_{x\to-3^-} h(x)$	*(b)* $\lim_{x\to-3^+} h(x)$	*(c)* $\lim_{x\to-3} h(x)$
(d) $h(-3)$	*(e)* $\lim_{x\to 0^-} h(x)$	*(f)* $\lim_{x\to 0^+} h(x)$
(g) $\lim_{x\to 0} h(x)$	*(h)* $h(0)$	*(i)* $\lim_{x\to 2} h(x)$
(j) $h(2)$	*(k)* $\lim_{x\to 5^+} h(x)$	*(l)* $\lim_{x\to 5^-} h(x)$



Exercício 43 *Esboce o gráfico de um exemplo de uma função* f *que satisfaça a todas as condições dadas:* $\lim_{x\to 2} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$ *e* $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$.

Exercício 44 *Calcule:*

(a) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{|x-3|}{x-3}$ *(b)* $\lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{|x-3|}{x-3}$ *(c)* $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|x-3|}{x-3}$ *(d)* $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2-6x+9}{x-3}$

Exercício 45 *Demonstre que*

$$\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}e^{\sin(\pi/x)} = 0.$$

Exercício 46 *Existe um número* a *tal que*

$$\lim_{x\to -2} \frac{3x^2 + ax + a + 3}{x^2 + x - 2}$$

exista? Caso exista, encontre a *e o valor do limite.*

Exercício 47

(a) Calcule $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{2x+5}{2x^3+4x-1}$.

(b) Mostre que existe $r > 0$ *tal que*

$$x > r \Rightarrow 0 < \frac{2x+5}{2x^3+4x-1} < \frac{1}{2}.$$

Exercício 48 *Calcule os seguintes limites:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(x - \sqrt{x^2+1}\right)$ *(b)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x \left[\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right)\right]$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left[(1-x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]$ *(d)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^4+7}\right)$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^2 \left[\ln\left(1 + \frac{3}{x^2}\right)\right]$ *(e)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x^4}{(2x^4+3x+2)}\right)$

(f) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^x$ *(g)* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \sec\left(\frac{\pi x^3+213}{(x^3+10x+1)}\right)$

Exercício 49 *Sabendo-se que* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{1-x^3} = 6$ *e* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{g(x)}{1-x} = -10$, *é correto afirmar que:*

(a) Nada se pode afirmar sobre $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)\cos\left(\frac{1}{x-1}\right)$ *e* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{g(x)}{1-x^2}$.

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$ *e* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = -3/5$.

(c) Nada se pode afirmar sobre $\displaystyle\lim_{x\to 1} g(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right)$ *e* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)}$.

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} f(x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$ *e* $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{g(x)} = -9/5$.

(e) Todas as outras alternativas são falsas.

Exercício 50 (IME) *Dada a função racional* $f(x) = \dfrac{x^3 + ax^2 + bx + c}{mx^2 + nx + p}$ *e sabendo que* $a,\ b,\ c,\ m,\ n,\ p \in \mathbb{Z}$ *e que:*

(a) $f(2) = 0$

(b) para $x = -1$ *tem-se uma indeterminação do tipo* $\dfrac{0}{0}$

(c) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -6$

(d) $x = 1$ *é raiz do polinômio* $mx^2 + nx + p$

(e) $f(3) = \dfrac{1}{f(4)}$

determine os coeficientes $a,\ b,\ c,\ m,\ n,\ p$.

Exercício 51 *Mostre os itens abaixo usando o teorema do Confronto:*

(a) Se f é limitada em uma vizinhança do ponto a e $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$*, então* $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = 0$*;*

(b) $\cos(x)$ *é função contínua.*

Exercício 52 *Dê exemplo de funções* f *e* g *tais que*

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = L,\ L \neq 0 \quad e \quad \lim_{x \to p^+} g(x) = 0,$$

mas o limite abaixo não dá ∞ *e nem* $-\infty$

$$\lim_{x \to p^+} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Exercício 53 *A resolução abaixo está incorreta. Indique onde os erros ocorrem e então calcule o limite corretamente.*

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} - x$$

$$= \lim_{x \to \infty} x \underbrace{\left(\sqrt{1 + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}} - 1\right)}_{\to 0}$$

$$= \lim_{x \to \infty} x.0 = 0$$

Exercício 54 *Decida se cada uma das afirmações abaixo é verdadeira ou falsa, justificando ou apresentando um contra-exemplo.*

(a) *Se* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções tais que* f *é limitada e positiva e* $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, *então tem-se que* $\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = \infty$.

(b) *Se* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções tais que* f *é limitada e* $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, *então tem-se que* $\lim_{x\to\infty} f(x) + g(x) = \infty$.

(c) *Se* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *são funções tais que* $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$, *então* $\lim_{x\to\infty} f(x) - g(x) = \infty$.

Exercício 55 *Dê exemplos de funções* f *e* g *tais que:*

(a) $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ *e* $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$;

(b) $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x\to 0} g(x) = \infty$ *e* $\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) = 1$;

(c) $\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} \neq 1$;

(d) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ *e* $\lim_{x\to 0} f(x) - g(x) \neq 0$.

Exercício 56 *Em cada item abaixo, determine o maior conjunto onde a função* f *em questão é contínua.*

a) $f(x) = \dfrac{3x-5}{2x^2-x-3}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x-3}$ c) $f(x) = \sqrt{2x-3} + x^2$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$ e) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ f) $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{x-6}}$

Exercício 57 *Analise a continuidade das funções abaixo nos seus domínios.*

a) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{x-1}{x^2-1}} & , \textit{ se } x \neq \pm 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & , \textit{ se } x = 1 \\ 0 & , \textit{ se } x = -1 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} \frac{2-x}{2-|x|} & , \textit{ se } x \neq 2 \\ 1 & , \textit{ se } x = 2 \end{cases}$

Exercício 58 *Sejam* f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções contínuas em* $\mathbb{R}$ *tais que* $f(3) = g(3)$. *Pergunta-se: a função* $h(x) = \begin{cases} f(x) & , \textit{ se } x \leq 3 \\ g(x) & , \textit{ se } x > 3 \end{cases}$ *é contínua em* $\mathbb{R}$? *Justifique sua resposta.*

Exercício 59 *A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma unidade de massa a uma distância* r *do centro do planeta é*

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3}, r < R \\ \dfrac{GM}{r^2}, r \geq R. \end{cases}$$

onde M *é a massa da Terra ,* R *é o seu raio e* G *é a constante gravitacional.* F *é uma função contínua de* r*?*

Exercício 60 *Demonstre que a função*

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin(1/x), x \neq 0 \\ 0, x = 0 \end{cases}$$

é contínua.

Exercício 61 *Determine as constantes* A, B *de modo que a função*
$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{, se } x \leq 2 \\ Ax + B & \text{, se } 2 < x < 5 \\ -6x & \text{, se } x \geq 5 \end{cases}$ *seja contínua em* $\mathbb{R}$.

Exercício 62 *Encontre exemplos de funções tais que:*
a) $f + g$ *é contínua em* x_0 *mas* f *e* g *não são.*
b) $f \circ g$ *é contínua em* x_0 *mas* g *é descontínua em* x_0 *e* f *é descontínua em* $g(x_0)$.
c) f *é contínua em* $g(x_0)$, g *não é contínua em* x_0 *mas* $f \circ g$ *é contínua em* x_0.

Exercício 63 *Considere a função*

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 2 \\ \dfrac{x^2}{2}, & x < 2. \end{cases}$$

Calcule:

(a) $\displaystyle\lim_{x \to 2^-} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$

(c) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2}$ *(ou seja, a derivada de* $g(x)$ *em x=2, existe?)*

(d) A função $f(x) = \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2}$ *é contínua em 2? Por que?*

Exercício 64 *Calcule:*

a) $\lim_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{x}{\operatorname{sen}(x) - 2x}\right)$ b) $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\cos(\frac{\pi}{2} - 3x)}{x}\right)$

Exercício 65 *Considere* $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$ *e* $h(y) = \begin{cases} 1 & \text{, se } y \geq 6 \\ g(y) & \text{, se } y < 6 \end{cases}$, *onde* g *é dada de modo que* $h \circ f$ *e* $f \circ h$ *estão bem definidas.*
Verifique se as afirmações abaixo são verdadeiras ou não.

a) $\lim_{x\to 2} h(f(x)) = h(\lim_{x\to 2} f(x))$ b) $\lim_{y\to 2} f(h(y)) = f(\lim_{y\to 2} h(y))$

Exercício 66 *Esboce as curvas transladadas dos itens (a) e (c) e conclua sobre os limites dos itens (b) e (d).*

(a) $y = 2^x - 1$ *e* $y = 2^{-x} - 1$

(c) $y = 1 - e^x$ *e* $y = 1 - e^{-x}$

(b) $\lim_{x\to\infty} (2^x - 1)$

(d) $\lim_{x\to -\infty} (1 - e^{-x})$

Exercício 67 *Faça o gráfico das funções abaixo e verifique se possuem assíntotas justificando com os* ***limites apropriados***.

(a) $y = e^{|x|}$ *(b)* $y = e^{-|x|}$ *(c)* $y = e^{x-3}$

Exercício 68 *Responda:*

(a) $\lim_{x\to 0^+} \ln(x)$

(d) $\lim_{x\to \infty} \ln(x-3)$

(b) $\lim_{x\to \infty} \ln(x)$

(e) $\lim_{x\to 3^+} \ln(x-3)$

(c) $\lim_{x\to \infty} (\ln(x) - 5)$

(f) $\lim_{x\to 3^+} 1 + \ln(x-3)$

Exercício 69 *Encontre o domínio de cada uma das funções abaixo.*

(a) $f(x) = \dfrac{1}{2 + e^x}$

(b) $f(x) = \cos(e^{-x})$

(c) $f(x) = \dfrac{3}{1 - e^{2x}}$

(d) $f(x) = \dfrac{1 - e^{x^2}}{1 - e^{1-x^2}}$

(e) $f(x) = \dfrac{1+x}{e^{\cos x}}$

Exercício 70 *Use as propriedades dos logaritmos para simplificar as expressões.*

(a) $\ln \operatorname{sen}(\theta) - \ln\left(\dfrac{\operatorname{sen}(\theta)}{5}\right)$

(b) $\ln(3x^2 - 9x) + \ln\left(\dfrac{1}{3x}\right)$

(c) $\ln \sec(\theta) + \ln\cos(\theta)$

(d) $\ln(8x + 4) - 2\ln 2$

Exercício 71 *Resolva em* k*:*

(a) $e^{2k} = 4$

(b) $100e^{10k} = 200$

(c) $e^{\overline{1000}}^{k} = a$

(d) $e^{5k} = \dfrac{1}{4}$

(e) $80e^{k} = 1$

(f) $e^{(\ln 0,8)k} = 0,8$

Exercício 72 *Resolva em* t*:*

(a) $e^{kt} = \dfrac{1}{10}$

(b) $e^{-0,01t} = 1000$

Exercício 73 *Se* $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln 2}{2}$*, é necessário que* $x = 2$*? Justifique sua resposta.*

Exercício 74 *Enuncie os seguintes teoremas:*

(a) *O Teorema do Anulamento;*

(b) *O Teorema do Valor Intermediário;*

(c) *O Teorema de Weierstrass.*

Exercício 75 (a) *Mostre que existe um número real* x_0 *tal que* $x_0^5 - 4x_0 + 1 = 7,21$*;*

(b) *Considere* $f,\ g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas tais que* $f(a) < g(a)$ *e* $g(b) < f(b)$*. Mostre que existe* $c \in]a, b[$ *tal que* $f(c) = g(c)$*.*

Exercício 76 (a) *Se* $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 9$*, mostre que existe* $x_0 \in \mathbb{R}$ *tal que* $f(x_0) = 100$*;*

(b) *Mostre que a equação* $x^5 - 3x^4 - 2x^3 - x + 1 = 0$ *tem, pelo menos, uma raiz no intervalo* $]0, 1[$*.*

Exercício 77 *Dada a função* $f : [-2, 7] \to \mathbb{R}$, *definida por* $f(x) = \begin{cases} 4 - \frac{x^2}{2} & , \text{ se } -2 \leq x < 4 \\ 2 & , \text{ se } 4 \leq x \leq 7 \end{cases}$, *pergunta-se:* f *tem máximo e mínimo no intervalo* $[-2, 7]$*? Justifique sua resposta. No caso da resposta a questão acima ser negativa, pergunta-se: isto contradiz o Teorema do Valor Extremo? Justifique sua resposta.*

Exercício 78 *Mostre que a equação*

$$x^3 - \frac{1}{1 + x^4} = 0$$

admite pelo menos uma raiz real.

Exercício 79 *Seja* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{1 + x^2}.$$

(a) Prove que o valor máximo de f *é* $f(1)$*;*

(b) Mostre que existe $x_1 \in]-1, 0[$ *onde* $f(x_1)$ *é o valor mínimo de* f.

Exercício 80 *Seja* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua, onde* I *é um intervalo qualquer. Então mostre que a imagem de* f *é um intervalo (observe que {a} = [a,a]).*

Exercício 81 *Seja* $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *contínua com* $f(a) < f(b)$*. Suponha que*

$$\forall\, s, t \in [a, b],\ \ s \neq t \implies f(s) \neq f(t).$$

Prove que f *é estritamente crescente (i.e.,* $\forall\, s, t \in [a, b],\ s < t \implies f(s) < f(t)$*).*

Exercício 82 *Seja* f *uma função definida por*

$$f(x) = 2x^3 - \sqrt{x^2 + 3x}\,.$$

(a) Determine o domínio de f*;*

(b) Verifique que f *é contínua em* $[0, +\infty[$*;*

(c) Mostre que a única raiz de f *em* $[1, +\infty[$ *é o número real* 1*, e que* $f(2) > 0$ *e* $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$*;*

(d) Verifique ainda que $f(x) > 0$ *em* $]1, +\infty[$ *e que* $f(x) < 0$ *em* $]0, 1[$.

Exercício 83 *Um corredor parte do repouso e corre numa pista circular em uma único sentido. Ele para quando chega ao ponto de partida. Mostre que, pelo menos, uma vez durante esta volta, ele deve ter desenvolvido a mesma velocidade em pontos diametralmente opostos.*

Exercício 84 *Um alpinista começa a escalar uma montanha às 8:00 horas do sábado e chega ao topo às 16:00 horas do mesmo dia. Acampa no topo e desce às 8:00 horas do domingo, chegando no ponto original de saída às 16:00 horas. Mostre que em algum horário no domingo ele estava à mesma altura em que esteve no mesmo horário no sábado.*

Exercício 85 *Recordando: (a) Quais limites definem reta assíntota vertical? Qual é a equação da reta assíntota vertical?*
(b) Quais limites definem reta assíntota horizontal?
Isso tem a ver com o exercício 28? Qual é a equação da reta assíntota horizontal?
(c) Use limite e distância e defina reta assíntota inclinada da forma $y = ax + b$. *Essa definição serve também para o caso (a) ou (b)?*
(d) Por que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ *não indica existência de assíntotas para* $y = f(x)$*?*

Exercício 86 *Calcule os seguintes limites. Lembre que* $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ *(vale o mesmo para* $x \to -\infty$*), ou seja,* $\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e$.

a) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$ b) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x-3}$ c) $\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{3x}$ d) $\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^2}$ f) $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x}$ g) $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{2}{x+3}\right)^{x}$ h) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{3x}$

i) $\lim_{x\to 0}\frac{\log_2(x+1)}{x}$ j) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^{x}$ k) $\lim_{x\to 3}\frac{e^{x-3}-1}{2x-6}$ l) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{e^{-x}-1}$

m) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-e^{x}}{-5x}$ n) $\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{e^{x+3}-e^3}$ o) $\lim_{x\to 0}\frac{ax}{e^{bx}-1}$

p) Esses limites definem assíntotas verticais ou horizontais? Quais as equações destas assíntotas?

Exercício 87 *(a) É verdade que* $e^{x^2} = e^{2x}$*? Explique com as regras de exponencial. Dê contra-exemplo.*

(b) Se $a > 0$, $a \neq 1$ *então* $a^{\log_a(x)} = x$ *e* $\log_a(a^x) = x$. *Por quê?*

Exercício 88 *Calcule:*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1-\cos(x)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\ln(5x+7)+3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(2x+3)}{\ln(5x^2+7)+3}$

d) Considere $f(x) = \ln(|\sqrt{4x^6+21}-5|) + \ln\left(\dfrac{1}{|x^3-8|}\right)$. *Encontre o domínio de* f *e as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico de* f.

Exercício 89 *Calcule:*

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x^2 + \mathrm{sen}(10x))$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} (x - \sqrt[3]{2+5x^4})$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \arctan\left(\frac{2x^5-x}{5x^3+x^2}\right)$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \arccos\left(\frac{x^3+x}{x^3+x^2}\right)$

(e) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \arccos(x^2-2x^6)$ *faz sentido? Explique.*

Encontre as possíveis assíntotas de:

(f) $f(x) = \dfrac{x-7}{x^2+2x-8}$ *(g)* $f(x) = \sqrt{\dfrac{5^x}{3^x+2^x}}$

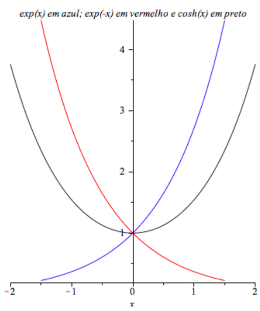


Figura 1: o gráfico de $\cosh(x)$ é metade da soma das outras duas funções.

Exercício 90 *Calcule* $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^{1-p}}$.

Dica: note a necessidade de dividir em casos $p < 1$, $p = 1$, $p > 1$.

Exercício 91 *Usando a base e, as funções hiperbólicas são definidas abaixo. A função* $\cosh(x)$ *modela estruturas da arquitetura ou contorno de objetos na natureza. Essa curva modelo é chamada catenária. Por exemplo, o fio entre dois postes de energia é uma catenária.*

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \ \operatorname{cosech}(x) = \frac{2}{e^x - e^{-x}}, \ \coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Mostre que:

(a) $\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1$

(b) $e^x = \operatorname{senh}(x) + \cosh(x)$ *e* $e^{-x} = \cosh(x) - \operatorname{senh}(x)$.

(c) $\operatorname{arcsenh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$, $x \in \mathbb{R}$, *é a função inversa do* $\operatorname{senh}(x)$.

(d) $\cosh(x)$ *é uma função par e que* $\operatorname{senh}(x)$ *e* $\tanh(x)$ *são ímpares.*

(e) $\tanh(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

(f) $\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y)$ *e* $\operatorname{senh}(2x) = 2\operatorname{senh}(x)\cosh(x)$*;*

(g) $1 - \operatorname{tgh}^2(x) = \operatorname{sech}^2(x)$.

(h) Rever abaixo: o gráfico de senh, cosh *e* tgh.

(i) Determine as condições para que senh, cosh *e* tgh *sejam inversíveis e encontre suas inversas.*

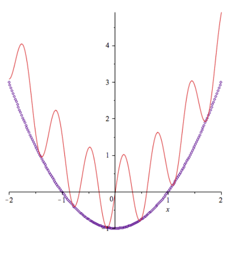


Figura 2: Dica para exercício 89(a): Gráficos de $y = x^2 - 1$ e de $y = x^2 + \operatorname{sen}(10x)$.

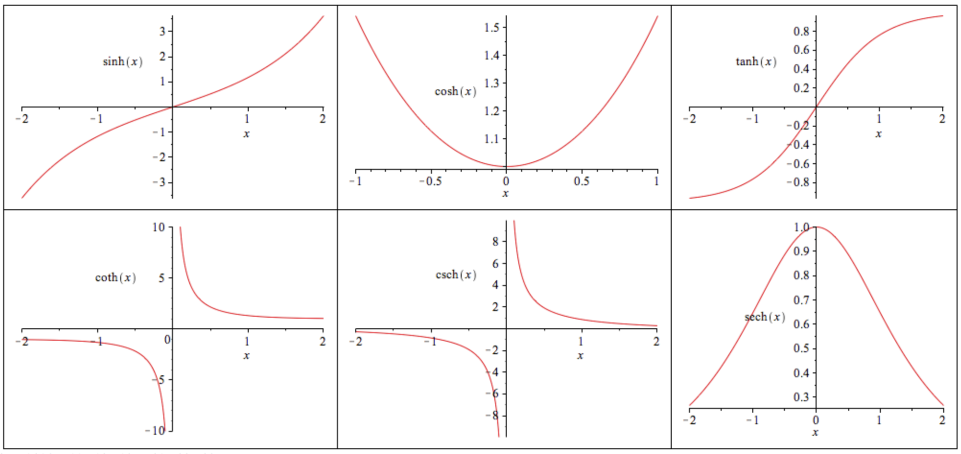


Figura 3: Gráficos das funções hiperbólicas:(a) Seno hiperbólico, (b) cosseno hiperbólico, (c) tangente hiperbólica, (d) cotangente hiperbólica, (e) cossecante hiperbólica, (f) secante hiperbólica. Software: Maple.

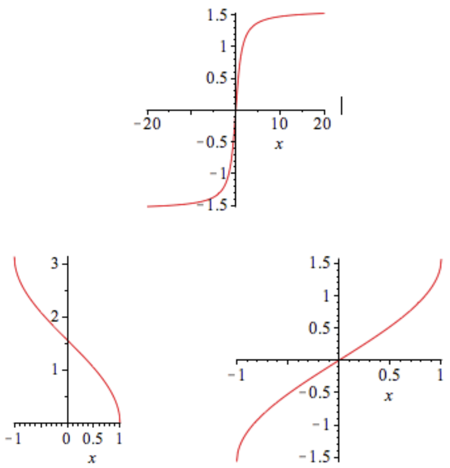


Figura 4: (1) arco tangente, domínio $\mathbb{R}$; (2) arco cosseno, domínio [-1,1]; (3) arco seno, domínio [-1,1]. Fonte: maple.

Relembrando o limite da derivada

Quase todos os itens dos exercícios (92) e (93) reforçam o estudo de fatos importantes da construção do conceito de derivada. Lembre que estes limites são sempre da forma $\frac{0}{0}$ (comprove). O quociente que aparece neste limites é a velocidade média de um problema num determinado contexto.

Exercício 92 *Calcule* $f'(p) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(p+h) - f(p)}{h}$, *em cada um dos casos:*

(a) $f(x) = x^2$.

(b) $f(x) = 3x + 1$.

(c) Calcule $f'(2)$ *e* $f'(1/3)$ *para o item (a). O que eles significam no gráfico de* $f(x) = x^2$*? Ilustre. Refaça estes passos também para o item (b).*

(d) Nas respostas dos itens (a) e (b), troque p *por* x *e assim você obterá a função* $f'(x)$.

(e) Considere a velocidade $v(x) = f'(x)$*, usando limite encontre a função aceleração:* $a(x) = f''(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \dfrac{v(x+h) - v(x)}{h}$*, para a função* $f(x) = x^3$.

Exercício 93 *Em um certo planeta, um objeto é lançado verticalmente do chão para cima com velocidade inicial de* $112\,\mathrm{m/s}$ *e a altura atingida no instante* t *segundos é* $f(t) = 112t - 16t^2$ *metros. Pergunta-se:*

a) Quais as velocidades do objeto nos instantes $t = 2$*,* $t = 3$ *e* $t = 4$ *segundos?*

b) Em que instante o objeto alcança a altura máxima?

c) Em que instante o objeto atinge o chão?

d) Com que velocidade o objeto atinge o chão?

Exercício 94 *Em cada um dos itens abaixo, encontre, se existir, a equação da reta tangente ao gráfico da função* $f(x)$ *nos pontos* $P = (x_0, f(x_0))$ *especificados:*

a) $f(x) = 5x + 4$, $P_1 = (2, 14)$ *e* $P_2 = (1, 9)$ b) $f(x) = 3x^2 - 5x + 4$, $P_1 = (0, 100)$ *e* $P_2 = (1, 2)$

c) $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $P = (0, 0)$

Exercício 95 *Determine as abscissas dos pontos do gráfico de* $y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5$ *nas quais a tangente é: a) horizontal b) paralela à reta* $2y + 8x - 5 = 0$.

Exercício 96 *a) Determine* A*,* B*, e* C *de modo que as curvas* $y = x^2 + Ax + B$ *e* $y = Cx - x^2$ *sejam tangentes uma a outra no ponto* $(1, 0)$.

b) Encontre a equação da reta tangente e da reta normal à curva $y = x^3 - 2x^2 + 4$ *no ponto* $(2, 4)$.