Introdução à Física das Partículas Elementares

4300422

edisciplinas.if.usp.br

(buscar: física das partículas elementares)

Fernando S Navarra

navarra@if.usp.br

Guilherme Germano

guilherme.germano@usp.br

Plano do Curso

14/03	Cap. 1
16/03	Cap. 1
21/03	Cap. 2
23/03	Cap. 2
28/03	Cap. 3
30/03	Cap. 3
04/04	
06/04	
11/04	Cap. 4
13/04	Cap. 4
18/04	Cap. 5
20/04	P1
25/04	Cap. 6
27/04	Cap. 6
04/05	Cap. 7
09/05	Cap. 7
11/05	Cap. 8
16/05	Cap. 8
18/05	Cap. 8
23/05	P2
25/05	Cap. 9
30/05	Cap. 9
01/06	Cap. 9
06/06	
08/06	
13/06	Cap. 10
15/06	Cap. 10
20/06	Cap. 10
22/06	Cap. 11
27/06	Cap. 11
29/06	P3
04/07	Sub

Aula 7

Capítulo 4

Equação de Klein-Gordon

Equação de Dirac

"Dedução" da Equação de Schrödinger

Definição de energia : $$E = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V,$$

Energia e momento viram operadores:

$$\hat{E} = i\frac{\partial}{\partial t}, \qquad \hat{\mathbf{p}} = -i\boldsymbol{\nabla} \qquad \hat{\mathbf{p}}^2 = -\nabla^2 \qquad \hat{p}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Aplicamos os dois lados da equação numa função de onda :

$$i\frac{\partial\psi(\mathbf{x},t)}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\frac{\partial^2\psi(\mathbf{x},t)}{\partial x^2} + \hat{V}\psi(\mathbf{x},t)$$

Equação de Klein-Gordon

$$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

Energia relativística !

$$\hat{E}^2\psi(\mathbf{x},t) = \hat{\mathbf{p}}^2\psi(\mathbf{x},t) + m^2\psi(\mathbf{x},t)$$

$$\hat{E}^2 = -\frac{\partial^2}{\partial t^2} \qquad \hat{\mathbf{p}}^2 = -\nabla^2$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \boldsymbol{\nabla}^2\psi - m^2\psi \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2\psi + m^2\psi = 0$$

Lembrando que $\partial^\mu\partial_\mu \equiv \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$

$$\boxed{(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\psi = 0}$$

Solução de onda plana $\psi(\mathbf{x}, t) = N e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - Et)}$

Substituindo na equação $$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \vec{\nabla}^2 \psi + m^2 \psi = 0$$

$$E^2 \psi = \mathrm{p}^2 \psi + m^2 \psi \longrightarrow E = \pm\sqrt{\mathrm{p}^2 + m^2}$$

Não podemos desprezar automaticamente as energias negativas...

Conservação da probabilidade: procurar uma equação da continuidade !

$$\psi^* \times \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \nabla^2 \psi - m^2 \psi \right] \quad - \psi \times \left[\frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} = \vec{\nabla}^2 \psi^* - m^2 \psi^* \right]$$

Primeiro termo menos o segundo :

$$\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} = \psi^* (\nabla^2 \psi - m^2 \psi) - \psi (\nabla^2 \psi^* - m^2 \psi^*)$$

$$\psi^* \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial t^2} = \psi^* (\nabla^2 \psi - m^2 \cancel{\psi}) - \psi (\nabla^2 \psi^* - m^2 \cancel{\psi^*})$$

Pomos a derivada temporal (a esquerda) e espacial (a direita) em evidência:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = \boldsymbol{\nabla} \cdot (\psi^* \boldsymbol{\nabla} \psi - \psi \boldsymbol{\nabla} \psi^*)$$

Comparando com $\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0}$

Concluimos que:

$$\rho = i \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) \qquad \mathbf{j} = -i(\psi^* \boldsymbol{\nabla} \psi - \psi \boldsymbol{\nabla} \psi^*)$$

Para a solução de onda plana :

$$\psi(\mathbf{x},t) = N e^{i(\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-Et)} \qquad \psi^* = N^* \, e^{-i(\mathbf{p}.\mathbf{x}-Et)}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -i\,E\,N e^{i(\mathbf{p}.\mathbf{x}-Et)} \qquad \frac{\partial\psi^*}{\partial t} = i\,E\,N^*\,e^{-i(\mathbf{p}.\mathbf{x}-Et)}$$

$$\rho = i\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) \longrightarrow \rho = 2|N|^2\,E$$

Se a energia for negativa:

$$E < 0 \longrightarrow \rho < 0$$

Problema para a interpretação de probabilidade !

Equação de Dirac (1928)

Paul Dirac

Mesmo ponto de partida: $$E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$$

Vamos "tirar a raiz quadrada" de maneira cuidadosa:

$$\hat{E}\psi = (\boldsymbol{\alpha} \cdot \hat{\mathbf{p}} + \beta m)\psi$$

E e p viram operadores e alfa e beta são constantes a serem determinadas!

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-i\alpha_x\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha_y\frac{\partial}{\partial y} - i\alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + \beta m\right)\psi$$

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-i\alpha_x\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha_y\frac{\partial}{\partial y} - i\alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + \beta m\right)\psi$$

Para determinar os alfas e beta vamos "elevar ao quadrado" a equação acima e recuperar a equação de Klein-Gordon

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \left(i\alpha_x\frac{\partial}{\partial x} + i\alpha_y\frac{\partial}{\partial y} + i\alpha_z\frac{\partial}{\partial z} - \beta m\right)\left(i\alpha_x\frac{\partial}{\partial x} + i\alpha_y\frac{\partial}{\partial y} + i\alpha_z\frac{\partial}{\partial z} - \beta m\right)\psi$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \alpha_x^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \alpha_y^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \alpha_z^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \beta^2 m^2\psi$$

(até aqui ótimo !)

mas tem os termos cruzados ...

$$+ (\alpha_x\alpha_y + \alpha_y\alpha_x)\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + (\alpha_y\alpha_z + \alpha_z\alpha_y)\frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial z} + (\alpha_z\alpha_x + \alpha_x\alpha_z)\frac{\partial^2\psi}{\partial z\partial x}$$

$$+ i(\alpha_x\beta + \beta\alpha_x)m\frac{\partial\psi}{\partial x} + i(\alpha_y\beta + \beta\alpha_y)m\frac{\partial\psi}{\partial y} + i(\alpha_z\beta + \beta\alpha_z)m\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

Esta equação deve se reduzir à Eq. de Klein Gordon

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \alpha_x^2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \alpha_y^2\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \alpha_z^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \beta^2 m^2\psi$$

... + termos cruzados

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - m^2\psi$$

Klein-Gordon

Para isso acontecer é necessário que

$$\begin{aligned} \alpha_x^2 = \alpha_y^2 = \alpha_z^2 = \beta^2 = I, \\ \alpha_j\beta + \beta\alpha_j = 0, \\ \alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 0 \quad (j \neq k), \end{aligned}$$

termos cruzados desaparecem !

Não podem ser números normais !!!

Hipótese: são matrizes !

Como escolher essas matrizes ?

São matrizes de traço nulo ! (traço = soma dos elementos da diagonal)

$$\beta^2 = I \qquad \alpha_i \beta = -\beta \alpha_i \qquad \mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(BCA)$$

$$\mathrm{Tr}(\alpha_i) = \mathrm{Tr}(\alpha_i \beta \beta) = \mathrm{Tr}(\beta \alpha_i \beta) = -\mathrm{Tr}(\alpha_i \beta \beta) = -\mathrm{Tr}(\alpha_i)$$

$$\longrightarrow \qquad \mathrm{Tr}(\alpha_i) = 0$$

São matrizes de autovalores +1 ou -1

$$\alpha_i X = \lambda X,$$

$$\alpha_i \alpha_i X = \alpha_i \lambda X \qquad \alpha_i^2 = I,$$

$$X = \lambda \alpha_i X$$

$$X = \lambda^2 X \qquad \longrightarrow \qquad \lambda = \pm 1$$

“A soma dos autovalores de uma matriz é igual ao seu traço”

Matrizes devem ter dimensão par !

Lembramos que : $\hat{E}\psi = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}} + \beta m)\psi = \hat{H}\,\psi$

Hamiltoniano de Dirac deve de ser hermitiano $\hat{H}_D = (\boldsymbol{\alpha}\cdot\hat{\mathbf{p}} + \beta m)$

Assim os autovalores (energias) serão reais

$$\alpha_x = \alpha_x^\dagger, \quad \alpha_y = \alpha_y^\dagger, \quad \alpha_z = \alpha_z^\dagger \qquad\qquad \beta = \beta^\dagger$$

Se fossem três: matrizes de Pauli (2 X 2)

Matrizes de Dirac (4 X 4) :

Matrizes de Dirac

$$\beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^0 = \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \qquad \gamma^k = \beta\alpha_k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{pmatrix}$$

Conhecendo alfa e beta voltamos para a equação inicial:

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(-i\alpha_x\frac{\partial}{\partial x} - i\alpha_y\frac{\partial}{\partial y} - i\alpha_z\frac{\partial}{\partial z} + \beta m\right)\psi$$

Agora a função de onda é uma matriz coluna com quatro componentes :

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos a equação acima por β

$$i\beta\alpha_x\frac{\partial\psi}{\partial x} + i\beta\alpha_y\frac{\partial\psi}{\partial y} + i\beta\alpha_z\frac{\partial\psi}{\partial z} + i\beta\frac{\partial\psi}{\partial t} - \beta^2 m\psi = 0$$

Introduzindo a notação

$$\gamma^0 \equiv \beta, \quad \gamma^1 \equiv \beta\alpha_x, \quad \gamma^2 \equiv \beta\alpha_y \quad \text{and} \quad \gamma^3 \equiv \beta\alpha_z,$$

$$i\gamma^0 \frac{\partial \psi}{\partial t} + i\gamma^1 \frac{\partial \psi}{\partial x} + i\gamma^2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + i\gamma^3 \frac{\partial \psi}{\partial z} - m\psi = 0.$$

Introduzimos a notação :

$$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$$

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Parece mas NÃO É
um quadrivetor !!!

Lembrando que $\partial_\mu \equiv (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$

Forma covariante :

$$\boxed{(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0}$$


POP!

FIM