Exercícios da Lista 3

Exercício 9

(c) R anel comutativo. Um ideal I de R é primo $\iff R/I$ não tem divisores não triviais do 0.

($\Rightarrow$) Seja I um ideal primo de R.
Sejam $a, b \in R$ tais que $(a+I)(b+I) = 0+I$.
Então $(a+I)(b+I) = ab+I = 0+I \Rightarrow$
$ab \in I$. Como I é primo, então $a \in I$ ou $b \in I$
$\Rightarrow a+I = 0+I$ ou $b+I = 0+I$.

($\Leftarrow$) Suponha que R/I não tem divisores não triviais de 0 e sejam $a, b \in R$ tais que $ab \in I$.
Então $(a+I)(b+I) = ab+I = 0+I$.
Como R/I não tem divisores não triviais de 0, então $a+I = 0+I$ ou $b+I = 0+I$. ∎

(d) R anel comutativo com 1 e M ideal maximal de R.
Pelo exercício 8, R/M é corpo. Em particular, R/M é domínio de integridade e pelo item (c), M é primo. ∎

Observações: No item (c), se R é anel comutativo com 1, então se $I \neq R$ é ideal de R, $\boxed{R/I \text{ é domínio de integridade} \iff I \text{ é primo}}$.
(Domínio de Integridade $\overset{def}{=}$ Anel Comutativo com unidade e sem divisores não triviais de 0.)

Exercício 18

Em $\mathbb{Z}$, se m, n são inteiros primos entre si e $a, b \in \mathbb{Z}$, então existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x \equiv a \pmod{m}$ e
$x \equiv b \pmod{n}$.

(Isso é o Teorema Chinês dos Restos para um sistema de congruências com 2 equações).

Repare que. $\mathrm{mdc}(m, n) = 1 \Rightarrow$

$$m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

$$m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = mn\mathbb{Z}$$

(Se $x \in m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$, então $m|x$ e $n|x$
$\underset{\mathrm{mdc}(m,n)=1}{\Longrightarrow} mn|x \Rightarrow x \in mn\mathbb{Z}$. A outra inclusão é clara!

Exercício 18: R anel comutativo com unidade e I, J ideais de R tais que

$$I + J = R.$$

(a) Mostrar que

$$IJ = I \cap J$$

Pelo Exercício 5 da Lista 3

$$IJ = \left\{ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,,\ x_i \in I,\ y_i \in J \text{ e } n > 0,\ n \in \mathbb{Z} \right\}$$ n é um inteiro

É claro que IJ é um ideal de R.

Cada parcela $\underset{\in I}{x_i}\,\underset{\in J}{y_i} \in I \cap J$.

Logo $IJ \subset I \cap J$.

Mostrar que a hipótese $I + J = R \Rightarrow$
$I \cap J \subset IJ$.

Como $I + J = R$ e R tem 1, temos
que $\exists\, r, s$; com $r \in I$ e $s \in J$
faz que $1 = r + s$.

Se $z \in I \cap J$, então $\underset{I \cap J}{\underset{\cap}{z}} = \underset{IJ}{\underset{\cap}{\overset{\in J\ \in I}{zr}}} + \underset{IJ}{\overset{\in I\ \in J}{zs}} \Rightarrow z \in IJ$

(c) Seja $\varphi : R \longrightarrow R/_I \times R/_J$
$\varphi(x) = (x + I, x + J)$
φ é homomorfismo de anéis.

Mostrar que φ é sobrejetora $\rightarrow$ (isso é provar o Teorema Chinês)

$(a + I, b + J) \in R/_I \times R/_J$

$a = \underset{I}{\underset{\cap}{ar}} + \underset{J}{\underset{\cap}{as}} \Rightarrow a + I = as + I$

$b = \underset{I}{\underset{\cap}{br}} + \underset{J}{\underset{\cap}{bs}} \Rightarrow b + J = br + J$

Se tomamos $x = as + br$, então
$\varphi(x) = (as + \underset{I}{\underset{\cap}{br}} + I,\ \underset{J}{\underset{\cap}{as}} + br + J)$
$= (as + I, br + J) = (a + I, b + J)$.

(d) $\varphi : R \longrightarrow R/_I \times R/_J$ é homo e é sobrejetora

Note que $\operatorname{Ker} \varphi = I \cap J = IJ$.
$R/_{\operatorname{Ker}\varphi} \cong R/_I \times R/_J$

Se $\operatorname{Ker} \varphi = \{0\}$ φ é injetora $\Rightarrow \varphi$ isomorfismo