TEOREMA DO HOMOMORFISMO

Sejam R e S anéis e $\varphi : R \longrightarrow S$ um homomorfismo.

Então existe um único homomorfismo $\bar{\varphi} : R/_{\mathrm{Ker}\,\varphi} \longrightarrow S$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "g"'] & S \\ R/_{\mathrm{Ker}\,\varphi} \arrow[ur, dashed, "\bar{\varphi}"'] & \end{tikzcd}$$

tal que $\bar{\varphi} \circ g = \varphi$,

Além disso:

(1) $\bar{\varphi}$ é injetora;

(2) $\mathrm{Im}\,\bar{\varphi} = \mathrm{Im}\,\varphi$.

Demonstrações:

Definimos $\bar{\varphi} : R/_{\mathrm{Ker}\,\varphi} \longrightarrow S$

$$\bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x)$$

$\bar{\varphi}$ está bem definida

Da fato: Se $\bar{x} = \bar{y}$ então $x \equiv y \ (\mathrm{mod}\ \mathrm{Ker}\,\varphi)$.
Então $x - y \in \mathrm{Ker}\,\varphi \Rightarrow \varphi(x-y) = 0$
$\Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$.

É claro que $\bar{\varphi} \circ g = \varphi$, pois

$$(\bar{\varphi} \circ g)(x) = \bar{\varphi}(g(x)) = \bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x).$$

Se $\psi : R/_{\mathrm{Ker}\,\varphi}$ é um homomorfismo tal que $\psi \circ g = \varphi$, então

$$\psi \circ g(x) = \varphi(x)$$

$$\Rightarrow \psi(\bar{x}) = \varphi(x) = \bar{\varphi}(\bar{x}) \quad \Rightarrow \psi = \bar{\varphi} \; \blacksquare$$

(2). $\operatorname{Im} \bar{\varphi} = \operatorname{Im} \varphi$

$y \in \operatorname{Im} \bar{\varphi} \iff \exists\, \bar{x} \in R/_{\operatorname{Ker}\varphi}$ tal que

$y = \bar{\varphi}(\bar{x}) = \varphi(x) \iff y \in \operatorname{Im}\varphi$. $\blacksquare$

(1) $\operatorname{Ker}\bar{\varphi} = \{\bar{x} \mid \bar{\varphi}(\bar{x}) = 0\} =$

$\{\bar{x} \mid \bar{\varphi}(g(x)) = 0\} = \{\bar{x} \mid \varphi(x)\}$

$= \{\bar{x} \mid x \in \operatorname{Ker}\varphi\} = \bar{0}$. $\blacksquare$

Assim, costumamos dizer que

se $\varphi : R \longrightarrow S$ é um homomorfismo de

anéis então $\boxed{R/_{\operatorname{Ker}\varphi} \cong \operatorname{Im}\varphi,}$

Exemplo: (Exercício 7 da Lista 3)

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo e

$C(I) = \{f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que f é contínua$\}$

$(C(I), +, \cdot)$ é um anel com a adição de funções e multiplicação de funções, isto é,

as operações

$C(I) \times C(I) \xrightarrow{+} C(I)$

$(f, g) \overset{+}{\longmapsto} f + g$

onde $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ $\forall x \in I$

$C(I) \times C(I) \xrightarrow{\cdot} C(I)$

$(f, g) \longmapsto fg$

$(fg)(x) = f(x)\,g(x)$ $\forall x \in I$

fornecem uma estrutura de anel ao conjunto $C(I)$.

$(C(I), +, \cdot)$ é um anel comutativo com unidade, tem divisores do zero.

(a) Quais são as funções inversíveis em $C(I)$?

A unidade de $C(I)$ é a função

$$\mathbb{1} : I \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathbb{1}(x) = 1 \quad \forall x \in I$$

Se $f(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$, então $g(x) = \dfrac{1}{f(x)} \in C(I)$

e $f(x) g(x) = \mathbb{1}$,

$$U(C(I)) = \{ f : I \longrightarrow \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0 \ \forall x \in I \}$$

(Se f for inversível, $\exists g \in C(I)$ tal que $f(x) g(x) = \mathbb{1} \ \forall x \in I \implies f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.)

(b) Seja $a \in I$. Seja

$$M_a = \{ f \in C(I) \mid f(a) = 0 \}.$$

Mostrar que M_a é um ideal de $C(I)$.

(Claro.)

Mostrar que M_a é um ideal maximal de $C(I)$.

Seja $\varphi : C(I) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\varphi(f) = f(a)$$

φ é homomorfismo de anéis pois

$$\varphi(f+g) = (f+g)(a) = f(a) + g(a) = \varphi(f) + \varphi(g)$$

$\varphi(fg) = (fg)(a) = f(a)g(a) = \varphi(f)\varphi(g)$

$\operatorname{Ker}\varphi = M_a$.

Temos que $C(I)/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi$.

Mas $\operatorname{Im}\varphi = \mathbb{R}$, pois dado $c \in \mathbb{R}$, sempre temos $f_c : I \to \mathbb{R}$, $f_c(x) = c \ \forall x$, $\varphi(f_c) = f_c(a) = c$.

Assim $C(I)/\operatorname{Ker}\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi = \underset{\text{corpo}}{\underset{\downarrow}{\mathbb{R}}}$.

Logo $\operatorname{Ker}\varphi = M_a$ é um ideal maximal de $C(I)$. #

(c) Este não é um problema de Álgebra.

Demonstração:

Seja M um ideal maximal de $C([0,1])$.

Mostrar que $\exists\, a \in [0,1]$ tal que $M = M_a$.

Suponha que o resultado é falso.

Então, para todo $a \in C([0,1])$, existe $f_a \in M$ tal que $f_a(a) \neq 0$.

Como f_a é contínua, pelo Teorema da conservação do sinal, existe um intervalo aberto $I_a \subset [0,1]$ tq $f_a(x) \neq 0 \ \forall x \in I_a$.

Temos que $[0,1] \subset \bigcup_{a\in[0,1]} I_a$.

Sendo $[0,1]$ compacto, $\exists\ a_1, \dots, a_n \in [0,1]$

tq $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{n} I_{a_i}$

$f_{a_i}(x) \neq 0 \ \forall x \in I_{a_i} \Rightarrow f_{a_i}^2(x) > 0 \ \forall x \in I$

Como $\forall y \in [0,1]$, $y \in \bigcup_{i=1}^{n} I_{a_i}$, temos

$f(y) \neq 0$, onde $f = f_{a_1}^2 + \dots + f_{a_n}^2$

e $f \in M$, já que cada $f_{a_i} \in M$.

Temos que f é inversível. Logo

$f \in M \Rightarrow 1 \in M \Rightarrow M = C([0,1])$,

absurdo pois M ideal maximal $\Rightarrow$

$M \neq C([0,1])$. ■