1. Mostre que não existe princípio do máximo para a equação da onda.

   [Sugestão: Exercício 5 (Golpe do martelo) da Lista 3.]

2. Mostre que a equação da difusão não está bem posta para $t < 0$.

   [Este exercício corrobora com o que qualquer físico sabe que o fluxo de calor e o movimento browniano são processos irreversíveis. Ir para trás no tempo leva ao caos.]

   [Sugestão 1. seja $u_n(x,t) = \frac{1}{n}\sin nxe^{-n^2kt}$. Verificar que essa função satisfaz a equação de difusão para todo x, t. Também, $u_n(x,0) = n^{-1}\sin nx \to 0$ uniformemente com $n \to \infty$. Mas considere qualquer $t < 0$, por exemplo, $t = -1$. Verifique que a estabilidade é violada, pelo menos no sentido uniforme.]

   [Sugestão 2. Um outro modo de resolver a questão é considerar $u(x,t) = S(x, t+1)$. Verifique que é solução da equação da difução para $t > -1$ e $-\infty < x < \infty$. Verifique que $u(0,t) \to \infty$ com $t \to -1$, o que mostra não podemos resolver para trás no tempo com dado inicial Então não podemos resolver para trás no tempo com dado inicial perfeitamente bom $(4\pi k)^{-1}e{-}x^2/4$.]

3. Este exercício é sobre a demonstração do seguinte teorema:

   Teorema. Seja $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua por partes e limitada. Então a solução u da equação da difusão na reta toda, com condição inicial ϕ, dada por

   $$\boxed{u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4kt}\phi(y)dy, \quad t > 0} \tag{1}$$

   é infinitamente diferenciável para $t > 0$ e

   $$\boxed{\lim_{t\to 0^+} u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\phi(x+) + \phi(x-)\right].}$$

   para todo x. Em cada ponto de continuidade este limite é igual a $\phi(x)$.

   (a) Prove que se ϕ é qualquer função contínua por partes, então

   $$\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\int_0^{\pm\infty} e^{-p^2}\phi(x+\sqrt{kt}p)dp \to \pm\frac{1}{2}\phi(x\pm) \quad \text{com } t \to 0^+.$$

   (b) Use o item (a) para provar o Teorema.

4. Na resolução por meio do método de Fourier (aula 12/4) do problema de valores inicial e de fronteira (PVIF) para a equação

   $$\begin{aligned}
   &u_{tt} = c^2u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0,\\
   &u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0,\\
   &u(x,0) = \phi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq L,
   \end{aligned}$$

   obtivemos funções

   $$u_n(x,t) = \left(A_n\cos\frac{n\pi ct}{n} + B_n\sin\frac{n\pi ct}{n}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

   que são soluções da equação da onda, $u_{tt} = c^2u_{xx}$, e que satisfazem às condições de fronteira $u(0,t) = u(L,t) = 0$. A função u_n é chamada o n-*ésimo harmônico* ou a n-*esima tônica*. A primeira tônica u_1 recebe, támbém, o nome de *tônica principal* ou *harmônico fundamental*, e os demais harmônicos são as *supertônicas*. Os coeficientes de t nas funções seno e cosseno, a saber, $\frac{n\pi c}{L}$, são chamados de frequências.

Se voltarmos à corda do violino que originalmente nos levou ao problema (PVIF), descobrimos que as frequências são

$$\frac{n\pi\sqrt{T}}{L\sqrt{\rho}}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

onde T é a intensidade da força de tensão e ρ é a densidade da corda. A nota "fundamental" da corda é a menor delas,

$$\frac{\pi\sqrt{T}}{L\sqrt{\rho}}.$$

Vê-se que as frequências das supertônicas são múltiplos da frequência da fundamental. As vibrações de uma corda se transmitem ao ar produzindo ondas sonoras. Assim, podemos entender o som produzido pela corda vibrante como uma superposição de harmônicos. As qualidades físicas do som são as funções dos vários parâmetros que entram na expressão de u_n. Assim, a *altura* do som é medida por sua frequência, dada em hertz (ciclos por segundo).

(a) Explique por que a nota produzida por uma corda do violino sobe abruptamente uma oitava quando a corda é pressionada exatamente no seu ponto médio.

(b) Explique por que e como a nota sobe quando a corda é esticada. (Daí a necessidade de afinar um violino, ou qualquer outro instrumento de corda, pois com o passar do tempo a tensão da corda varia e ela passa a produzir sons de alturas diferentes.)

(c) Explique por que e como a espessura da corda afeta a altura do som.