Aula 7: Extensões de funções contínuas

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1^o **Semestre de 2023 - Curso de Topologia**

Lembrar: Aula 4, Exercício 3. Se (X, τ) é T_4 e F é um fechado contido num aberto V, então existe um aberto W tal que $F \subset W \subset \bar{W} \subset V$ (note que isto é, na verdade, equivalente a ser T_4).

Vimos na aula passada.

Lema 1

Seja (X, τ) um espaço topológico. Suponha que exista $(F_s)_{s \in \mathbb{Q}}$ família de fechados satisfazendo:

1. $F_r \subset \operatorname{Int}(F_s)$ *se* $r < s$;
2. $\bigcup_{s \in \mathbb{Q}} F_s = X$;
3. $\bigcap_{s \in \mathbb{Q}} F_s = \emptyset$.

Então a função $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *dada por* $\varphi(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in F_r\}$ *é uma função contínua.*

Proposição 2

Sejam (X, τ) espaço topológico T_4 e $f : A \to [0,1]$ contínua onde $A \subset X$ é fechado. Então existe $F : X \to [0,1]$ extensão contínua de f.

Demonstração. Para cada $r \in \mathbb{Q}$ e cada $s \in (0,1) \cap \mathbb{Q}$, sejam:

$$A_r = \{x \in A : f(x) \leq r\} \qquad U_s = X \setminus \{x \in A : f(x) \geq s\}.$$

Note que, por continuidade, A_r é fechado, pois $A_r = f^{-1}\big((-\infty, r]\big)$, U_s é aberto e, se $r < s$, temos também que $A_r \subset U_s$. Considere $(r_n, s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma enumeração para

$$P = \{(r, s) : r, s \in \mathbb{Q} \text{ tais que } 0 \leq r < s < 1\}.$$

Sobre P, considere a ordem $(r, s) \leq (a, b)$ quando $r \leq a$ e $s \leq b$. Note que, assim, $(r, s) < (a, b)$ se $r \leq a, s \leq b$ e ocorre também $r \neq a$ ou $s \neq b$.

Vamos construir uma sequência $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de abertos de X de forma que:

(a) $A_{r_n} \subset H_n \subset \overline{H_n} \subset U_{s_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

(b) $\overline{H_m} \subset H_n$ se $(r_m, s_m) < (r_n, s_n)$.

Vamos fazer essa construção indutivamente. Por T_4, podemos definir H_1 de forma que

$$A_{r_1} \subset H_1 \subset \overline{H_1} \subset U_{s_1}$$

Suponha definido H_j satisfazendo as condições acima para todo $j < n$. Vamos definir H_n. Considere (união indexada pelo vazio é o conjunto vazio, interseção indexada pelo vazio é o espaço todo)

$$J = \{j \in \mathbb{N} : j < n, (r_j, s_j) < (r_n, s_n)\}$$

$$K = \{k \in \mathbb{N} : k < n, (r_n, s_n) < (r_k, s_k)\}.$$

Note que, dados $j \in J$ e $k \in K$, temos que $\bar{H}_j \subset H_k$ por hipótese (pois $(r_j, s_j) < (r_k, s_k)$). Assim, $\bigcup_{j\in J} \bar{H}_j \subset \bigcap_{k\in K} H_k$. E, novamente por T_4, podemos definir H_n de forma que

$$\left(A_{r_n} \cup \bigcup_{j \in J} \overline{H_j}\right) \subset H_n \subset \overline{H_n} \subset \left(U_{s_n} \cap \bigcap_{k \in K} H_k\right)$$

Pelas definições de J e K temos $A_n \subset \bigcap_{k \in K} H_k$ e $\bigcup_{j \in J} \overline{H_j} \subset U_{s_n}$.

Com isso, terminamos a construção de $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

No que se segue, convém reindexarmos tal família da seguinte forma

$$\left(H_{(r,s)}\right)_{(r,s) \in P}.$$

Note que, pela construção, temos

(a) $A_r \subset H_{(r,s)} \subset \overline{H_{(r,s)}} \subset U_s$ para $(r, s) \in P$

(b) $\overline{H_{(r,s)}} \subset H_{(a,b)}$ se $(r, s) < (a, b)$.

Estamos prontos para definir a família $(F_r)_{r \in \mathbb{Q}}$ como no lema anterior.

Seja $r \in \mathbb{Q}$. Vamos dividir em alguns casos:

- se $r < 0$, $F_r = \emptyset$
- se $0 \leq r < 1$, $F_r = \bigcap_{s>r} \overline{H_{(r,s)}}$
- se $r \geq 1$, $F_r = X$

É imediato que cada F_r é fechado e que $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}} F_r = X$.

Resta mostrar que $F_r \subset \operatorname{Int}(F_s)$ se $r < s$.

Note que isso é imediato se $r < 0$ ou se $s \geq 1$.

Resta o caso em que $0 \leq r < s < 1$, que é justamente o caso $(r, s) \in P$.

Fixe $t \in \mathbb{Q}$ tal que $r < t < s$. Note que

$$F_r \subset \overline{H_{(r,s)}} \subset H_{(t,s)} \subset \overline{H_{(t,s)}} \subset \bigcap_{u>s} \overline{H_{(s,u)}} = F_s.$$

Em particular, isso mostra que $F_r \subset \operatorname{Int}(F_s)$ (pois $H_{(t,s)}$ é aberto). Assim, temos que a função

$$F(x) = \inf \{r \in \mathbb{Q} : x \in F_r\},$$

dada pelo lema, é contínua.

Note que, pela definição de $F_r, 0 \leq F(x) \leq 1$ para todo $x \in X$.

Desta forma, resta mostrar que F estende f.

Note que, dado $r \in \mathbb{Q} \cap [0, 1)$, temos

$$A_r \subset \left(A \cap \bigcap_{s>r} \overline{H_{(r,s)}} \right) \subset \left(A \cap \bigcap_{s>r} U_s \right) = A_r.$$

Lembrando que $A \cap \bigcap_{s>r} \overline{H_{(r,s)}} = A \cap F_r$, obtemos que $A_r = A \cap F_r$.

Assim, se mostrarmos que $f(x) = \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in A_r\}$, para $x \in A$, teremos que, de fato, F estende f.

Note que, se $r \in \mathbb{Q}$ é tal que $x \in A_r$, então $f(x) \leq r$. Assim, $f(x) \leq \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in A_r\}$.

Suponha que $f(x) < \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in A_r\}$ e seja $r_0 \in \mathbb{Q}$ tal que $f(x) \leq r_0 < \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in A_r\}$.

Note que, pela definição de A_{r_0}, temos que $x \in A_{r_0}$. Mas isso contraria o fato que $r_0 < \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \in A_r\}$.

Como consequência, obtemos um resultado que caracteriza os espaços T_4 em termos de funções contínuas:

Teorema 3 (Lema de Urysohn)

Seja (X, τ) espaço topológico. Então (X, τ) é T_4 se, e somente se, para todo $F, G \subset X$ fechados disjuntos, existe $f : X \to [0, 1]$ continua tal que $f(F) = \{0\}$ e $f(G) = \{1\}$.

Demonstração. Considere $g : F \cup G \to [0, 1]$ dada por $g(x) = 0$ se $x \in F$ e $g(x) = 1$ caso $x \in G$. Note que g é contínua (pois X é T_4). Assim, qualquer extensão contínua de tal g satisfaz o que precisamos.

Para a recíproca, basta notar que $f^{-1}\big([0, \frac{1}{2})\big)$ e $f^{-1}\big((\frac{1}{2}, 1]\big)$ são os abertos procurados (disjuntos, um contendo F e o outro contendo G).

Podemos pensar que espaços T_4 (e portanto os normais $= T_1 + T_4$) são aqueles em que funções contínuas separam fechados disjuntos.

Ao tentarmos fazer o análogo para separação entre pontos e fechados, obtemos um novo axioma de separação.

Definição 4

Dizemos que (X,τ) *é* $T_{3\frac{1}{2}}$ *se, para todo* $x \in X$ *e* $F \subset X$ *fechado tal que* $x \notin F$ *existir* $f : X \to [0,1]$ *contínua, tal que* $f(x) = 0$ *e* $f(y) = 1$*, para todo* $y \in F$*. No caso que* (X,τ) *também é* T_1*, dizemos que* (X,τ) *é um* ***espaço completamente regular.***

Veremos adiante que esse axioma é de fato um novo axioma de separação (no sentido que ele não coincide com nenhum dos anteriores).

Também veremos que ele tem um papel importante em compactificações.

Por fim, as funções a serem estendidas não precisam ser limitadas.

Teorema 5 (de Tietze)

Sejam (X, τ) *espaço* T_4, $F \subset X$ *fechado e* $f : F \to \mathbb{R}$ *uma função contínua. Então existe* $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ *extensão contínua de* f.

Demonstração. Caso 1: Suponha $f : F \to (-1, 1)$. Vamos mostrar que existe $\tilde{f} : X \to (-1, 1)$ extensão contínua de f.

Temos que existe $g : X \to [-1, 1]$ contínua que estende f (veja o Exercício 1 a seguir).

Seja $G = g^{-1}\big(\{-1, 1\}\big)$. Note que F e G são fechados disjuntos.

Se $G = \emptyset$, então $g : X \to (-1, 1)$ é um extensão contínua de f.

Se $G \neq \emptyset$, pelo Lema de Urysohn, existe $h : X \to [0, 1]$ contínua tal que $h(F) = \{1\}$ e $h(G) = \{0\}$. Finalmente, note que a função desejada é $\tilde{f} : X \to (-1, 1)$ dada por $\tilde{f}(x) = g(x)h(x)$.

Caso 2: $f : F \to \mathbb{R}$.

Fixe $\varphi : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ bijetora contínua com inversa contínua por exemplo $\varphi(x) = \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

Temos então que $\varphi^{-1} \circ f : F \to (-1, 1)$ é contínua e, pelo Caso 1, existe $\bar{f} : X \to (-1, 1)$ extensão contínua de $\varphi^{-1} \circ f$.

Note então que $\tilde{f} = \varphi \circ \bar{f} : X \to \mathbb{R}$ é contínua e

$$x \in F \Rightarrow \tilde{f}(x) = \varphi(\bar{f}(x)) = \varphi(\varphi^{-1} \circ f(x)) = f(x).$$

Exercícios - Extensões

1. Mostre que se X é T_4 e $M \subset X$ é um fechado, então para toda $f : M \to [a, b]$ contínua, existe $F : X \to [a, b]$ extensão contínua de f.
2. Mostre que todo espaço completamente regular é um espaço regular.
3. Sejam $f, g : X \to Y$ funções contínuas, onde Y é de Hausdorff.
   (a) Então o conjunto $E = \{x \in X : f(x) = g(x)\}$ é fechado.
   (b) Mostre a Proposição 2 da Aula 6 a partir do item anterior.
4. Mostre que subespaços de espaços $T_{3\frac{1}{2}}$ são $T_{3\frac{1}{2}}$.
5. Use o Lema 1 da aula de hoje para provar o Lema de Urysohn diretamente (sem usar a Proposição 2 da aula de hoje).
6. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de $\mathbb{R}$ tal que $x_n \to x \in \mathbb{R}, x_n \neq x_m$ se $n \neq m$ e $x_n \neq x$ para todo n. Seja também $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência de pontos de $\mathbb{R}$ tal que $y_n \to y \in \mathbb{R}$. Mostre que existe uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$ e $f(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
7. Mostre que vale o seguinte enunciado alternativo para o Teorema de Tietze: Sejam (X, τ) espaço T_4. Sejam $F \subset X$ fechado e $f : F \to [0, 1)$ função contínua. Então existe $\tilde{f} : X \to [0, 1)$ extensão contínua de f.

8. Dado X de Hausdorff e usando a notação do Teorema de Tietze, mostre que a extensão $\tilde{f}$ é única se, e somente se, $F = X$.

9. Este é um roteiro para exibir um espaço que é regular mas não é completamente regular. Considere

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2\right\}$$

e p um ponto tal que $p \notin S$. O exemplo será o conjunto $S \cup \{p\}$ com uma topologia especial. Para cada $x \in \mathbb{R}$, considere

$$D_x = \{(t, t - x) \in S : x \leq t \leq x + 2\}$$

$$V_x = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in S\right\}$$

$$A_x = D_x \cup V_x$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere

$$U_n = \{(x, y) \in S : x \geq n\}$$

$$I_n = [n, n + 1] \times \{0\}.$$

Exercícios - Extensões

Considere sobre T a topologia gerada pelos conjuntos da forma:

- $\{(x, y)\}$ onde $(x, y) \in S$ e $y > 0$
- $A_x \backslash F$, onde F é um conjunto finito;
- $\{p\} \cup U_n$

(a) Note que os abertos da forma $A_x \backslash F$, onde F é finito e não contém $(x, 0)$, formam uma base para $(x, 0)$.

(b) Note que os abertos da forma $\{p\} \cup U_n$ formam uma base para p.

(c) Note que os pontos (x, y) com $y > 0$ são isolados.

(d) Note que esta topologia é de Hausdorff.

(e) Mostre que o subespaço S é zero-dimensional (e, portanto, completamente regular).
O espaço topológico é zero-dimensional se existe uma base para a topologia formado por abertos fechados.

(f) Mostre que T é regular (note que só precisa mostrar que p admite sistema fundamental de vizinhanças fechadas).

(g) Seja $J \subset A_x$ infinito. Note que $(x, 0) \in \bar{J}$.

(h) Seja $g : S \to \mathbb{R}$ contínua tal que $g((x, 0)) = 0$ para algum $x \in \mathbb{R}$. Mostre que $g(a) \neq 0$ para,

(i) Seja $g : S \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que, se $g(a) = 0$ para infinitos $a \in A_x$, então $g((x,0)) = 0$.

(j) Agora vamos trabalhar com função contínua $f : S \to \mathbb{R}$ fixada. Vamos supor que exista um conjunto infinito de pontos da forma $(x,0) \in I_n$ tais que $f((x,0)) = 0$. Seja $X = \{(x_k, 0) \in I_n : f((x_k,0)) = 0\}$ um subconjunto enumerável de tais zeros.

  (i) Para cada k, note que existe $E_k \subset D_{x_k}$ enumerável de forma que $f(x) = 0$ para todo $x \in D_{x_k} \setminus E_k$.

  (ii) Considere, para cada k, $J_k = \{x : (x,y) \in E_k$ para algum $y\}$. Note que J_k é enumerável.

  (iii) Considere $J = [n+1, n+2] \setminus \bigcup_{k \geq 1} J_k$. Note que $J \times \{0\}$ tem complementar enumerável em I_{n+1}.

  (iv) Fixe $(x,0) \in J \times \{0\}$. Note que existem infinitos pontos $a \in A_x$ tais que $f(a) = 0$. Conclua que $f((x,0)) = 0$.

  (v) Note que provamos que existem infinitos pontos x em I_{n+1} tais que $f(x) = 0$. Prove intutivamente que isso é verdade para todo I_j com $j \geq n$.

(k) Seja $f : T \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f[I_0] = 0$. Note que para todo k, I_k contém infinitos zeros de f.

(l) Note que p e I_0 não podem ser separados por uma função contínua (assim, T não é $T_{3\frac{1}{2}}$).

10. Dada $f : X \to X$, dizemos que x é um ponto fixo se $f(x) = x$. Dado (X, τ) espaço de Hausdorff, mostre que existe uma única função contínua $f : X \to X$ tal que, para todo $x \in X$ e todo V aberto tal que $x \in V$, existe $y \in V$ ponto fixo.