Limite e Continuidade - Aula 08

Limites Laterais

Seja D um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diremos que $p \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D se é um ponto de acumulação de $D^+ = D \cap (p, \infty)$ $(D^- = D \cap (-\infty, p))$.

Se $f : D_f \to \mathbb{R}$ é uma função e p é um ponto de acumulação à direita (esquerda) de D_f o **limite de $f(x)$ quando x tende a p pela direita (esquerda)** é

$$\lim_{x \to p^+} f(x) := \lim_{x \to p} f|_{D^+}(x) \qquad \left(\lim_{x \to p^-} f(x) := \lim_{x \to p} f|_{D^-}(x) \right)$$

Critério negativo para existência de limites

Teorema

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e* p *é um ponto de acumulação à direita e à esquerda de* D_f*. Então*

$$\lim_{x \to p} f(x)$$

existe se, e somente se, existem os limites laterais à direita e à esquerda e

$$\lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x).$$

Prova: Existe $\lim_{x \to p} f(x) = L$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_f,\ 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon,$$

se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_f \cap (-\infty, p),\ 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$$

e

$$x \in D_f \cap (p, \infty),\ 0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

se, e somente se,

$$L = \lim_{x \to p^+} f(x) = \lim_{x \to p^-} f(x). \square$$

Exemplo

Seja $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \to R$ *a função definida por*

$$f(x) = \frac{x-1}{|x-1|}, \ x \neq 1.$$

Mostre que não existe o limite $\lim_{x\to 1} f(x)$.

De fato: *Para todo* $x < 1$ *temos que* $f(x) = -1$ *e portanto* $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$. *Por outro lado, para todo* $x > 1$ *temos que* $f(x) = 1$ *e portanto* $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$. *Do teorema anterior, não pode existir o limite* $\lim_{x\to 1} f(x)$.

Exemplo

Prove que $\lim_{x \to p} k = k$ *e* $\lim_{x \to p} x = p$.

- Dado $k \in \mathbb{R}$, seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = k$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Fixe $p \in \mathbb{R}$ e note que, dado $\epsilon > 0$, escolhendo $\delta > 0$ qualquer, temos $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(p)| = |k - k| = 0 < \epsilon$.
- Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Fixe $p \in \mathbb{R}$ e note que, dado $\epsilon > 0$, escolhendo $\delta = \epsilon$, temos $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |g(x) - g(p)| = |x - p| < \delta = \epsilon$.

Exemplo

Prove que $\lim_{x \to p} x^2 = p^2$.

- Seja $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Fixe $p \in \mathbb{R}$ e, dado $\epsilon > 0$, escolhendo $\delta \leq \min\{1, \epsilon/(2|p|+1)\}$, temos

  $i)$ $0 < |x-p| < \delta \leq 1 \;\Rightarrow\; |x+p| \leq |x-p| + |2p| < 2|p|+1$ e

  $ii)$ $0 < |x-p| < \delta \leq \epsilon/(2|p|+1) \;\Rightarrow |x+p||x-p| < (2|p|+1)\delta \leq \epsilon$

  segue que, se $0 < |x-p| < \delta = \min\{1, \epsilon/(2|p|+1)$,

  $$\begin{aligned} |h(x) - h(p)| = |x^2 - p^2| &= |x+p||x-p| < (2|p|+1)|x-p| \\ &< (2|p|+1)\delta \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Observação:

Esperamos que os exemplos anteriores (que estão entre os limites mais elementares) tenham convencido o leitor que, definitivamente, não queremos calcular limites por definição.

Isto impõe a necessidade de buscar métodos que nos permitam mostrar a existência de limites sem que tenhamos, todas as vezes, que recorrer à definição.

As propriedades dos limites serão provadas a seguir e passarão a ser a nossa principal ferramenta para o cálculo de limites.

Definição (Continuidade)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e* $p \in D_f$*. Diremos que* $f(x)$ **é contínua em** p *se, dado* $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in D_f \text{ e } |x - p| < \delta, \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(p)| < \varepsilon \ .$$

Observação

Note que,

- *se* p *é um ponto de acumulação de* D_f*, então* f *é contínua em* p *se, e somente se,* $\lim_{x \to p} f(x) = f(p)$ *e*
- *se* p *é um ponto isolado de* D_f*, então* f *é contínua em* p*.*

Exemplo

(a) *A função* $f(x) = k$ *é contínua em* $x = p$ *para cada* $p \in \mathbb{R}$.

(b) *A função* $f(x) = x$ *é contínua em* $x = p$ *para cada* $p \in \mathbb{R}$.

(c) *A função* $f(x) = x + 1$ *é contínua em* $x = p$ *para cada* $p \in \mathbb{R}$.

(d) *A função* $f(x) = x^2$ *é contínua em* $x = p$ *para cada* $p \in \mathbb{R}$.

(e) *A função* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$ *não é contínua em* $x = 1$ *pois* $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 \neq 0 = f(1)$.

Exercício: Verifique cada uma das afirmativas do exemplo anterior utilizando os resultados dos exemplos anteriores para as mesmas funções.

Propriedades do Limite

Sejam $f_i : D_{f_i} \to \mathbb{R}$, $i = 1$ e 2, funções. Suponha que p seja um ponto de acumulação de $D_{f_1} \cap D_{f_2}$ e que $\lim\limits_{x \to p} f_i(x) = L_i$, $i = 1, 2$. Então:

1) $\lim\limits_{x \to p} (f_1 + f_2)(x) = \lim\limits_{x \to p} f_1(x) + \lim\limits_{x \to p} f_2(x) = L_1 + L_2$.

2) $\lim\limits_{x \to p} (f_1 - f_2)(x) = \lim\limits_{x \to p} f_1(x) - \lim\limits_{x \to p} f_2(x) = L_1 - L_2$.

3) $\lim\limits_{x \to p} \; k \; f_1(x) = k\, L_1$ onde $k =$ constante.

4) $\lim\limits_{x \to p} f_1(x) \cdot f_2(x) = \lim\limits_{x \to p} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x \to p} f_2(x) = L_1 \cdot L_2$.

5) $\lim\limits_{x \to p} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to p} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to p} f_2(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, se $L_2 \neq 0$.

Antes de provar estas propriedades vamos, rapidamente, nos convencer da enorme quantidade de trabalho que evitamos ao fazer o pequeno esforço de demonstrá-las.

Primeiramente note que, como $\lim\limits_{x\to p} x = p$ então, de 4) segue que $\lim\limits_{x\to p} x^2 = p^2$ e, por indução, obtemos que $\lim\limits_{x\to p} x^n = p^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Agora, de 1), 2), 3) e 4) podemos facilmente concluir que, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é um polinômio, $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$.

Além disso, usando 5), concluímos que, se $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são polinômios e p é tal que $f_2(p) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to p} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{f_1(p)}{f_2(p)}$

Mais geralmente, utilizando a propriedade do produto e um argumento de indução obtemos que, se $\lim_{x\to p} f(x) = L$,

$$\lim_{x\to p} [f(x)]^n = \left[\lim_{x\to p} f(x)\right]^n = L^n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Exercício

Calcule $\lim_{x\to 2}(5x^3 - 8)$, $[R : 32]$ *e* $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3+1}{x^2+4x+3}$, $[R : 1/4]$.

Exemplo

Calcule $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2 - 9}{h}$, $[R : 6]$.

De fato: Simplesmente note que, para $h \neq 0$, $\dfrac{(3+h)^2-9}{h} = h+6$ e que $\lim_{h\to 0} h + 6 = 6$.

Sabendo de que estas propriedades facilitam, enormemente, o nosso trabalho, vamos fazer a demonstração das mesmas para poder utilizá-las, livremente.

Prova de 1): $\lim\limits_{x \to p}(f_1 + f_2)(x) = \lim\limits_{x \to p} f_1(x) + \lim\limits_{x \to p} f_2(x) = L_1 + L_2$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_i > 0$ tal que

$$x \in D_{f_i},\ 0 < |x - p| < \delta_i \ \Rightarrow\ |f_i(x) - L_i| < \frac{\epsilon}{2},\ \ i = 1, 2.$$

Escolha $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então

$$x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1+f_2},\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow$$

$$|(f_1+f_2)(x)-(L_1+L_2)| \leq |f_1(x)-L_1| + |f_2(x)-L_2| < \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

ou seja $\lim\limits_{x \to p}(f_1 + f_2)(x) = L_1 + L_2$.

Prova de 3): $\lim_{x \to p} k\ f_1(x) = k\, L_1$ onde $k =$ constante

Se $k = 0$ o resultado é trivial. Se $k \neq 0$, dado $\epsilon > 0$ seja $\delta > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1},\ 0 < |x - p| < \delta \ \Rightarrow\ |f_1(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{|k|}.$$

Então

$$x \in D_{f_1},\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |kf_1(x) - kL_1| = |k|\ |f_1(x) - L_1| < |k|\ \frac{\epsilon}{|k|} = \epsilon.$$

ou seja $\lim_{x \to p} (kf_1)(x) = kL_1$.

Prova de 4): $\lim\limits_{x\to p}(f_1(x)\cdot f_2(x)) = \lim\limits_{x\to p} f_1(x)\cdot \lim\limits_{x\to p} f_2(x) = L_1\cdot L_2$

Dado $\epsilon > 0$ seja $\delta_1 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_1},\ 0 < |x-p| < \delta_1 \ \Rightarrow\ |f_1(x) - L_1| < \frac{\epsilon}{2(|L_2|+1)}.$$

e $\delta_2 > 0$ tal que

$$x \in D_{f_2},\ 0 < |x-p| < \delta_2 \ \Rightarrow\ |f_2(x) - L_2| < \min\left\{\frac{\epsilon}{2(|L_1|+1)}, 1\right\}.$$

Logo $|f_2(x)| \leq |f_2(x) - L_2| + |L_2| < |L_2| + 1$ sempre que $x \in D_{f_2},\ 0 < |x-p| < \delta_2$.

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1 \cdot f_2}$, $0 < |x - p| < \delta$,

$$\begin{aligned}
|(f_1 \cdot f_2)(x) - (L_1 \cdot L_2)| &= |(f_1(x) - L_1)f_2(x) + L_1(f_2(x) - L_2)| \\
&\leq |f_1(x) - L_1||f_2(x)| + |L_1||f_2(x) - L_2| \\
&\leq |f_1(x) - L_1|(|L_2| + 1) + |L_1||f_2(x) - L_2| \\
&< \frac{\epsilon}{2(|L_2|+1)}(|L_2| + 1) + |L_1|\frac{\epsilon}{2(|L_1|+1)} \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

ou seja $\lim_{x \to p}(f_1 \cdot f_2)(x) = L_1 \cdot L_2$.

Prova de 5): $\lim\limits_{x\to p}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to p}f_1(x)}{\lim\limits_{x\to p}f_2(x)}=\dfrac{L_1}{L_2}\,,\quad \text{se}\;\; L_2\neq 0\,.$

Dado $\epsilon>0$ seja $\delta_1>0$ tal que

$$x\in D_{f_1},\; 0<|x-p|<\delta_1 \;\Rightarrow\; |f_1(x)-L_1|<\frac{\epsilon|L_2|}{4}$$

e $\delta_2>0$ tal que

$$x\in D_{f_2},\; 0<|x-p|<\delta_2 \;\Rightarrow\; |f_2(x)-L_2|<\min\left\{\frac{\epsilon|L_2|^2}{4(|L_1|+1)},\frac{|L_2|}{2}\right\}.$$

Logo, se $x\in D_{f_2},\, 0<|x-p|<\delta_2$

$$|L_2|\leq|f_2(x)-L_2|+|f_2(x)|<\frac{|L_2|}{2}+|f_2(x)| \;\text{ e }\; \frac{|L_2|}{2}<|f_2(x)|.$$

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $x \in D_{f_1} \cap D_{f_2} = D_{f_1 \cdot f_2}$, $0 < |x-p| < \delta$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{L_1}{L_2}\right| &= \frac{|(f_1(x) - L_1)L_2 + (L_2 - f_2(x))L_1|}{|f_2(x)|\,|L_2|} \\
&\leq \frac{|f_1(x) - L_1||L_2| + |L_2 - f_2(x)||L_1|}{|L_2|\,|L_2|/2} \\
&\leq 2\frac{|f_1(x) - L_1|}{|L_2|} + 2|L_2 - f_2(x)|\frac{|L_1|}{|L_2|^2} \\
&\leq 2\frac{\epsilon|L_2|}{4}\frac{1}{|L_2|} + 2\frac{\epsilon|L_2|^2}{4(|L_1|+1)}\frac{|L_1|}{|L_2|^2} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

ou seja $\displaystyle \lim_{x \to p} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{L_1}{L_2}$.

Propriedades Adicionais: Comparação e Confronto

Além das propriedades mostradas na aula anterior, a comparação o confronto são propriedades extremamente úteis para que possamos concluir a existência de limites. Começamos com a comparação.

Teorema (Comparação)

Se p é um ponto de acumulação de $D_f \cap D_g$ e $f(x) \leq g(x)$ sempre que $x \in (D_f \cap D_g) \setminus \{p\}$ e x está próximo de p e os limites de f e g quando x tende a p existem, então

$$\lim_{x \to p} f(x) = L_f \leq L_g = \lim_{x \to p} g(x).$$

Observação: O texto em azul do enunciado significa que,

- existe $r > 0$ tal que $x \in D_f \cap D_g$, $0 < |x - p| < r$ implica $f(x) \leq g(x)$.

De fato: Dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_f > 0$ e $\delta_g > 0$ tais que,

$$x \in D_f,\ 0 < |x - p| < \delta_f \Rightarrow \boxed{L_f - \epsilon \leq f(x)} \leq L_f + \epsilon$$

$$x \in D_g,\ 0 < |x - p| < \delta_g \Rightarrow L_g - \epsilon \leq \boxed{g(x) \leq L_g + \epsilon}$$

Ainda, existe $r > 0$ tal que

$$x \in D_f \cap D_g,\ 0 < |x - p| < r \Rightarrow \boxed{f(x) \leq g(x)}.$$

Assim, para $\delta = \min\{\delta_f, \delta_g, r\}$, $x \in D_f \cap D_g$ e $0 < |x - p| < \delta$, temos

$$\boxed{L_f - \epsilon \leq f(x) \leq g(x) \leq L_g + \epsilon}$$

e consequentemente $L_f \leq L_g$.

Teorema (do Confronto)

Dadas f, g, h *funções e* p *ponto de acumulação de* $D = D_f \cap D_g \cap D_h$, *se existe* $r > 0$ *tal que* $\{x \in D_g : 0 < |x - p| < r\} \subset D_f \cap D_h$

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x), \quad \textit{para} \quad x \in D, \quad 0 < |x - p| < r,$$

e se

$$\lim_{x \to p} f(x) = L = \lim_{x \to p} h(x),$$

então

$$\lim_{x \to p} g(x) = L \, .$$

De fato: Dado $\epsilon > 0$, existem $\delta_f > 0$ e $\delta_h > 0$ tais que,

$$x \in D_f,\ 0 < |x - p| < \delta_f \Rightarrow L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon$$

$$x \in D_h,\ 0 < |x - p| < \delta_h \Rightarrow L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon$$

Ainda, existe $r > 0$ tal que

$$x \in D_f \cap D_g \cap D_h,\ 0 < |x - p| < r \Rightarrow f(x) \leq g(x) \leq h(x).$$

Se $\delta = \min\{\delta_f, \delta_h, r\}$, $x \in D_g$ e $0 < |x - p| < \delta$, temos

$$x \in D_f \cap D_g \cap D_h,\ 0 < |x - p| < r, \text{ and}$$

$$L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, para $\delta = \min\{\delta_f, \delta_h, r\}$, $x \in D_g$ e $0 < |x - p| < \delta$, temos $|g(x) - L| < \epsilon$ e portanto $\lim_{x \to p} g(x) = L$.

Exemplo

As funções trigonométricas são contínuas.

Prova: Das fórmulas de transformação de soma em produto, para qualquer p, temos

$$|\mathrm{sen} x - \mathrm{sen} p| = \left|2\mathrm{sen}\left(\frac{x-p}{2}\right)\cos\left(\frac{x+p}{2}\right)\right|$$

$$\leq 2\left|\mathrm{sen}\left(\frac{x-p}{2}\right)\right| \leq 2\left|\frac{x-p}{2}\right| = |x-p|.$$

Onde usamos que $|\mathrm{sen}\theta| \leq |\theta|$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Como $\lim_{x\to p}(x-p) = 0$, do Teorema do Confronto, segue que $\lim_{x\to p}(\mathrm{sen} x - \mathrm{sen} p) = 0$, ou seja, $\lim_{x\to p} \mathrm{sen} x = \mathrm{sen} p$. Logo a função seno é contínua para todo p.

A prova da continuidade do cosseno é feita de maneira similar utilizando a igualdade

$$\cos x - \cos p = -2\text{sen}\left(\frac{x+p}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{x-p}{2}\right).$$

A continuidade das outras funções trigonométricas seguem das propriedades do limite. $\square$