Noção Intuitiva e Definição de Limite
Aula 07

Primeiro Semestre de 2023

Noção Intuitiva

Vamos estudar o comportamento de uma função $f(x)$ para valores de x próximos de um ponto p.

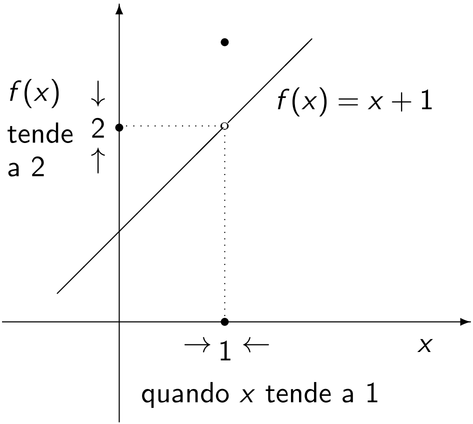
Consideremos, inicialmente, a função

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ para } x \neq 1 \\ 3 \text{ para } x = 1 \end{cases}$$

Vamos analisar o que acontece com os valores $f(x)$, da função f, para x próximo de 1 (distinto de 1).

Para valores de x próximos de 1 (distintos de 1), alguns valores de $f(x)$ são dados na tabela abaixo:

$x > 1$	$f(x)$	$x < 1$	$f(x)$
$1,5$	$2,5$	$0,5$	$1,5$
$1,1$	$2,1$	$0,9$	$1,9$
$1,01$	$2,01$	$0,99$	$1,99$
$1,001$	$2,001$	$0,999$	$1,999$
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	2	1	2


$f(x)$
tende
a 2
$\downarrow$
2
$\uparrow$
$f(x) = x + 1$
$\rightarrow 1 \leftarrow$
x
quando x tende a 1

Da tabela vemos que quando x estiver próximo de 1 (por valores menores ou maiores que 1) $f(x)$ estará próximo de 2.

De fato, podemos tomar os valores de $f(x)$ tão próximos de 2 quanto quisermos, tomando valores x suficientemente próximos de 1 (distintos de 1).

Expressamos isso dizendo que o *limite da função* $f(x)$*, quando* x *tende a* 1*, é igual a 2.*

Definição (Intuitiva)

Escreveremos

$$\lim_{x\to p} f(x) = L$$

e diremos que L **é o limite de** $f(x)$**, quando** x **tende a** p*, se* $f(x)$ *fica arbitrariamente próximo de* L *para valores de* x *suficientemente próximos de* p*, mas distintos de* p*.*

Observação:

É importante notar que, ao analisar o limite de $f(x)$ quando x tende a p, não consideramos $x = p$. Estamos interessados em estudar o que ocorre com $f(x)$ para x próximo a p. A função f nem precisa estar definida para $x = p$.

Exemplo

Vamos tratar de encontrar o limite de $\dfrac{x^2-1}{x-1}$ *quando* x *se aproxima de* 1*, isto é,* $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$.

Observe que a função racional $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ não está definida quando $x=1$. Tanto o numerador quanto o denominador assumem o valor nulo em $x=1$. Observe ainda que, para $x\neq 1$,

$$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=x+1.$$

Como os valores das duas funções coincidem para $x\neq 1$, seus limites, quando x tende a 1, também coincidem. Assim, como no exemplo anterior, deduzimos que

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

Exemplo

Determine $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ *onde*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & \textit{para } x \neq 1 \\ 0, & \textit{para } x = 1. \end{cases}$$

Observe que para $x \neq 1$ a função $f(x)$ é igual à função do exemplo anterior, desta forma sabemos que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

O valor do $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ não coincide com o valor da função em $x = 1$.

Isto significa que o gráfico de f apresenta um salto em $x = 1$.

Expressamos este fato dizendo que *a função não é contínua.*

Exemplo

Determine o valor de c para que o gráfico da função f não apresente salto em $x = 1$, onde

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}, & \textit{para } x \neq 1 \\ c, & \textit{para } x = 1. \end{cases}$$

Observe que para $x \neq 1$

$$f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \sqrt{x}+1$$

Desta forma, quando x se aproxima de 1, $f(x)$ se aproxima de 2. Sendo assim, escolha apropriada de c é $c = 2$.

Limite: Definição

Vamos a dar a definição precisa de limite. Começamos, em um exemplo, com uma análise mais formal da idéia de limite. Seja

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } x \neq 3, \\ 6, & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

Intuitivamente vemos que $\lim_{x \to 3} f(x) = 5$.

Quão próximo de 3 deverá estar x para que $f(x)$ difira de 5 por menos do que 0,1?

A distância de x a 3 é $|x - 3|$ e a distância de $f(x)$ a 5 é $|f(x) - 5|$, logo nosso problema é achar um número δ tal que,

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta, \quad \text{então} \quad |f(x) - 5| < 0,1.$$

Veja que $|x-3|>0$ equivale a dizer que $x \neq 3$.

Note que se $0<|x-3|<\dfrac{0,1}{2}$, então

$$|f(x)-5| = |(2x-1)-5| = |2x-6| = 2|x-3| < 0,1.$$

Assim a resposta será $\delta = \dfrac{0,1}{2} = 0,05$.

Se mudarmos o número 0,1 no problema para um número menor (para 0,01), então o valor de δ mudará (para $\delta = \dfrac{0,01}{2}$).

Em geral, se usarmos um valor positivo arbitrário ε, então o problema será achar um δ tal que

$$\text{se} \quad 0 < |x - 3| < \delta \quad \text{então} \quad |f(x) - 5| < \varepsilon.$$

E podemos ver que, neste caso, δ pode ser escolhido igual a $\dfrac{\varepsilon}{2}$.

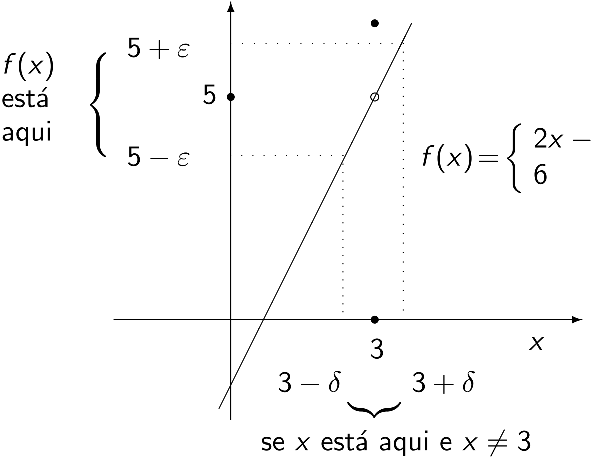
Esta é uma maneira de dizer que $f(x)$ está próximo de 5 quando x está próximo de 3.

Também podemos escrever

$$5 - \varepsilon < f(x) < 5 + \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 3 - \delta < x < 3 + \delta, \quad x \neq 3,$$

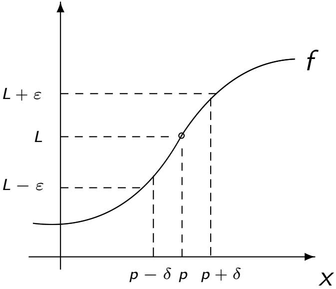
ou seja, tomando os valores de $x \neq 3$ no intervalo $(3 - \delta, 3 + \delta)$, podemos obter os valores de $f(x)$ dentro do intervalo $(5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon)$.

Graficamente, temos o seguinte:

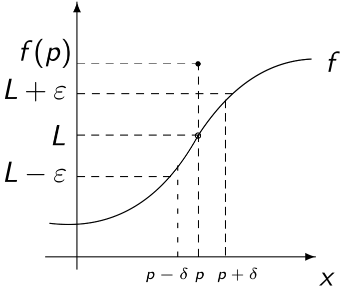


$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \textit{se } x \neq 3 \\ 6 & \textit{se } x = 3. \end{cases}$$

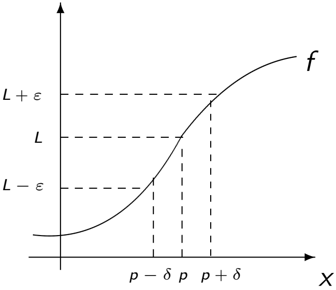
Interpretação geométrica do limite.



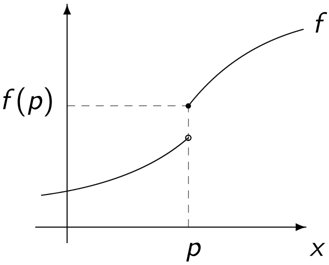
$$\lim_{x \to p} f(x) = L$$



$$\lim_{x \to p} f(x) = L \neq f(p)$$



$$\lim_{x \to p} f(x) = L = f(p)$$



Não existe o limite de f em p

Definição (Limite)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ *uma função e* p *um ponto de acumulação de* D_f. *Diremos que* o limite de $f(x)$ quando x tende p é L *se, dado* $\varepsilon > 0$ *existe um* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in D_f \text{ e } 0 < |x - p| < \delta, \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Notação: $\boxed{\lim_{x \to p} f(x) = L}$

Teorema (Unicidade do limite)

Seja $f : D_f \to \mathbb{R}$ uma função e p um ponto de acumulação de D_f. O limite de $f(x)$ quando x tende a p, quando existir, será único.

De fato: Se L_1 e L_2 são limites de $f(x)$ quando x tende a p, $L_1 \neq L_2$, dado $\epsilon = \frac{|L_1 - L_2|}{2} > 0$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$x \in D_f \text{ e } 0 < |x - p| < \delta_i, \implies |f(x) - L_i| < \varepsilon, \quad i = 1, 2.$$

Logo, se $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, para $x \in D_f$ e $0 < |x - p| < \delta$,

$$|L_1 - L_2| = |L_1 - f(x) + f(x) - L_2| \leq |f(x) - L_1| + |L_2 - f(x)| < 2\varepsilon = |L_1 - L_2|.$$

O que é um absurdo. Isto mostra que o limite é único.

Exemplo

Prove que $\lim_{x \to 2} (3x - 2) = 4$.

Fazemos uma análise preliminar para determinar como δ pode ser obtido a partir de ϵ. Dado $\varepsilon > 0$, o problema é determinar δ tal que

$$\text{se} \qquad 0 < |x - 2| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |(3x - 2) - 4| < \varepsilon.$$

Mas $|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = 3|x - 2|$. Assim, queremos

$$3|x - 2| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 2| < \delta.$$

Isto sugere que escolhamos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Provemos que esta escolha de δ é adequada. Dado $\varepsilon > 0$, escolha $\delta = \dfrac{\varepsilon}{3}$. Se $0 < |x - 2| < \delta$, então

$$|(3x - 2) - 4| = |3x - 6| = 3|x - 2| < 3\delta = 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher $\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$ tal que

$$|(3x - 2) - 4| < \varepsilon \quad \text{sempre que} \quad 0 < |x - 2| < \delta$$

logo, pela definição, $\lim\limits_{x \to 2} (3x - 2) = 4$.