



Disciplina: Matemática Aplicada a Finanças.
Professor: Daniel Ferreira Caixe.





Matemática Aplicada a Finanças

Aula: Capitalização Simples.

Professor: Daniel Ferreira Caixe.



ESALQ

Agenda



ESALQ

- Fórmulas de Capitalização Simples;
- Taxa proporcional e taxa equivalente; e
- Equivalência de capitais.



ESALQ

Capitalização Simples



ESALQ

➤ Os juros crescem de **forma linear** ao longo do tempo;

▪ **Por quê?**

➤ A taxa de juros incide somente sobre o **capital inicial**, também chamado de **principal** (não há “juros sobre juros”).



ESALQ

Notação Matemática



ESALQ

- (a) **VP (PV)**: é o valor presente do capital, ou seja, o principal;
- (b) **i**: é a taxa de juros periódica (interest rate);
- (c) **J**: são os juros acumulados, expressos em unidades monetárias;
- (d) **VF (FV)**: é o valor futuro de uma capital (ou montante), isto é, o principal somado aos juros acumulados até certo momento.
- (e) **n**: é o prazo que o principal fica aplicado/emprestado.



ESALQ

$$J / VP / i / n$$



ESALQ

❖ Fórmula do valor dos juros acumulados:

$$J = VP \times i \times n$$

■ Logo:

$$VP = \frac{J}{i \times n}$$

$$i = \frac{J}{VP \times n}$$

$$n = \frac{J}{VP \times i}$$



ESALQ

Exemplo I



ESALQ

Um capital de R\$ 80.000,00 é aplicado à taxa de 2,5% ao mês durante um trimestre. Determine o valor dos juros acumulados neste período.

$$J = VP \times i \times n$$

$$J = 80.000 \times 0,025 \times 3$$

$$J = \text{R\$ } 6.000$$



ESALQ

Exemplo II



ESALQ

Um negociante tomou um empréstimo pagando uma taxa de juros simples de 6% ao mês, durante nove meses. Ao final deste período, calculou em R\$ 270.000,00 o total dos juros incorridos na operação. Determine o valor do empréstimo.

$$VP = \frac{J}{i \times n}$$

$$VP = \frac{270.000}{0,06 \times 9} = \frac{270.000}{0,54} = \text{R\$ } 500.000$$



ESALQ

Exemplo III



ESALQ

Um capital de R\$ 40.000,00 ficou aplicado em um investimento por 11 meses, produzindo um rendimento financeiro de R\$ 9.680,00. Pede-se para apurar a taxa de juros oferecida por esta operação.

$$i = \frac{J}{VP \times n}$$

$$i = \frac{9.680}{40.000 \times 11} = \frac{9.680}{440.000} = 0,022 = 2,2\% \text{ a. m.}$$



ESALQ

Exemplo IV



ESALQ

Uma aplicação de R\$ 250.000,00, rendendo uma taxa de juros de 1,8% ao mês, produz, ao final de determinado período, juros no valor de R\$ 27.000,00. Calcule o prazo da aplicação.

$$n = \frac{J}{VP \times i}$$

$$n = \frac{27.000}{250.000 \times 0,018} = \frac{27.000}{4.500} = 6 \text{ meses}$$



ESALQ

Valor Futuro (Montante)



ESALQ

❖ Formula do valor futuro de um capital:

$$VF = VP + J$$

▪ Como $J = VP \times i \times n$:

$$VF = VP + VP \times i \times n$$

$$VF = VP \times (1 + i \times n)$$



ESALQ

VP por VF



ESALQ

- Como $\mathbf{VF} = \mathbf{VP} \times (\mathbf{1} + \mathbf{i} \times \mathbf{n})$:

$$\mathbf{VP} = \frac{\mathbf{VF}}{(\mathbf{1} + \mathbf{i} \times \mathbf{n})} = \mathbf{VF} \times \frac{\mathbf{1}}{(\mathbf{1} + \mathbf{i} \times \mathbf{n})}$$



ESALQ

Fatores do Regime Simples



ESALQ

(a) Fator de **capitalização** de juros simples (**FCS**) (ou de valor futuro):

- “ $(1 + i \times n)$ ”.
- Ao multiplicar um capital por **FCS**:
 - ✓ Os juros são **somados ao principal**; e
 - ✓ Chega-se ao **valor futuro** do capital.



ESALQ

Fatores do Regime Simples



ESALQ

(b) Fator de **atualização** de juros simples (**FAS**) (ou de valor presente):

- “ **$1/(1 + i \times n)$** ”.
- Ao multiplicar um capital por **FAS**:
 - ✓ Os juros são **subtraídos de seu valor futuro**; e
 - ✓ Chega-se ao **valor presente** do capital.



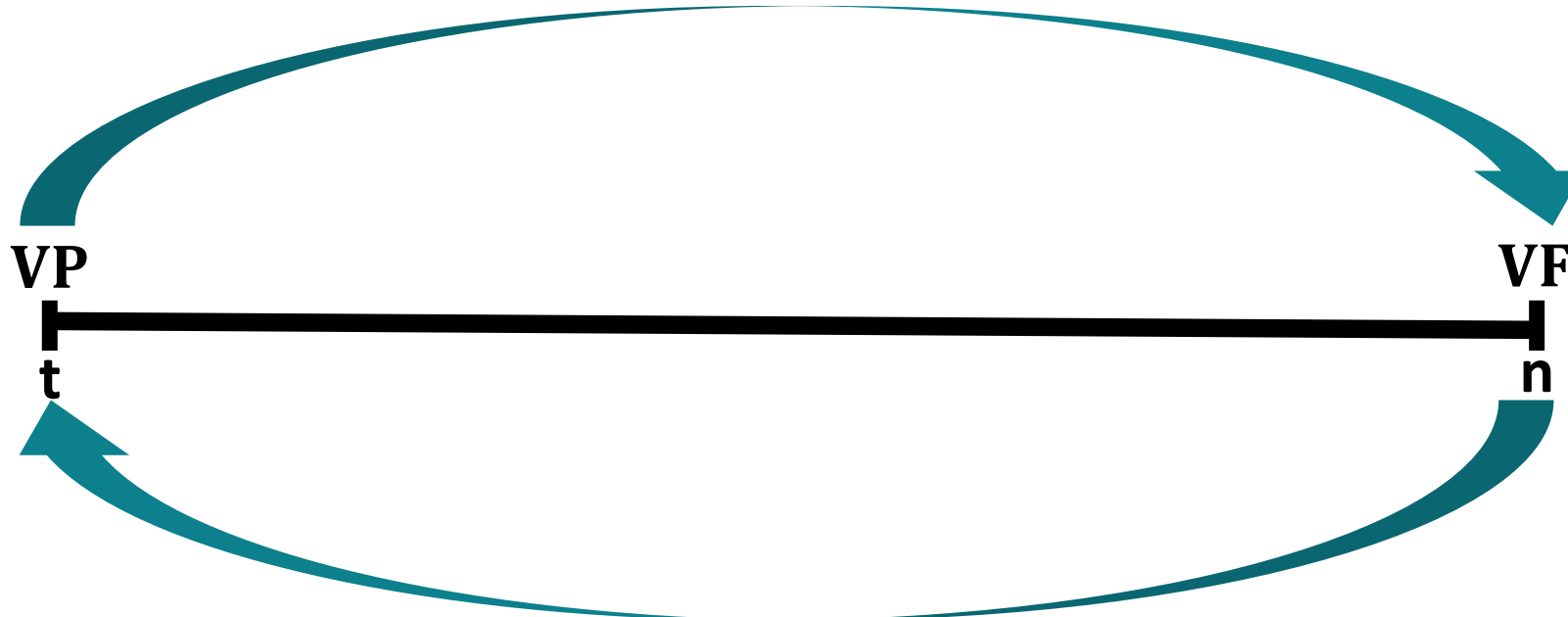
ESALQ

Fatores do Regime Simples



ESALQ

$$VF = VP \times (1 + i \times n)$$



$$VP = VF \times \frac{1}{(1 + i \times n)}$$



ESALQ

Exemplo V



ESALQ

Uma pessoa aplica R\$ 18.000,00 à taxa de 1,5% ao mês, durante 8 meses. Determine o valor acumulado ao final deste período.

$$VF = VP \times (1 + i \times n)$$

$$VF = 18.000 \times (1 + 0,015 \times 8)$$

$$VF = 18.000 \times 1,12 = \text{R\$ } 20.160$$



ESALQ

Exemplo VI - Fixação



ESALQ

Uma dívida de R\$ 900.000,00 irá vencer em 4 meses. O credor está oferecendo um desconto de 7% ao mês, caso o devedor deseje antecipar o pagamento para hoje. Calcule o valor que o devedor pagará se antecipar a liquidação da dívida.

$$VP = \frac{VF}{(1 + i \times n)} = \frac{900.000}{(1 + 0,07 \times 4)} = \frac{900.000}{1,28} = \text{R\$ } 703.125$$



ESALQ

Prazos



ESALQ

- Toda operação envolve dois prazos:

(a) Prazo a que se refere a taxa de juros contratada:

- Medida de tempo considerada pela taxa que é definida no contrato.

(b) Prazo de capitalização (ocorrência) dos juros:

- Intervalo de tempo periódico em que há incidência de juros.

✓ **Obs.:** (a) e (b) podem ou não ser iguais!



ESALQ

Prazos



ESALQ

- Exemplo de inequidade entre (a) e (b):
 - Como a taxa Selic está maior do que 8,5% ao ano, a **Caderneta de Poupança** paga aos seus depositantes uma taxa de juros de 6% **ao ano**, a qual é capitalizada ao principal todo **mês** por meio de um percentual proporcional de 0,5%.
 - Tem-se aqui, então, dois prazos:
 - ✓ Prazo da taxa (a): ano; e
 - ✓ Prazo de capitalização (b): mês.



ESALQ

Prazos



ESALQ

- Se (a) e (b) forem diferentes:

- Transforma-se o prazo da taxa no prazo de capitalização.

- ❖ Como?

- Por meio de taxas proporcionais ou equivalentes.



ESALQ

Taxa Proporcional (i_p)



ESALQ

- Também chamada de taxa **linear** ou “**nominal**”;
- Obtida da divisão entre a taxa de juros cotada e o número de vezes que ocorrerão os juros:

$$i_{\text{prop}} = \frac{\text{Taxa da operação}}{q}$$

Em que: q = número de períodos de capitalização dentro de **(a)**.



ESALQ

Taxa Proporcional (i_p)



ESALQ

A Caderneta de Poupança paga aos seus depositantes uma taxa de juros de 6% ao ano com capitalização mensal:

- **Número de períodos de capitalização:**

- ✓ 12 (1 ano tem 12 meses).

- **Percentual de juros que incidirá sobre o capital a cada mês:**

$$i_{\text{prop}} = \frac{6\%}{12} = 0,5\% \text{ ao mês}$$



ESALQ

Por que proporcional?



ESALQ

- Duas taxas, x e y, são **proporcionais**, se:
 - Para intervalos de tempo **diferentes**, medidos em unidades **iguais**:

$$\frac{n_x}{n_y} = \frac{i_x}{i_y}$$

Em que: n_x = intervalo de tempo do prazo de x; i_x = taxa de juros mensurada no prazo de x; n_y = intervalo de tempo do prazo de y; e i_y = taxa de juros mensurada no prazo de y.



ESALQ

Por que proporcional?



ESALQ

- A **Caderneta de Poupança** (com intervalos de tempo em **meses**):

$$\frac{n_x}{n_y} = \frac{i_x}{i_y}$$

$$\frac{12}{1} = \frac{6\%}{0,5\%} = 12$$



ESALQ

Por que proporcional?



ESALQ

- A **Caderneta de Poupança** (com intervalos de tempo em **anos**):

$$\frac{n_x}{n_y} = \frac{i_x}{i_y}$$

$$\frac{1}{1/12} = \frac{6\%}{0,5\%} = 12$$



ESALQ

Taxas Equivalentes



ESALQ

- Duas taxas são equivalentes quando:
 - ✓ Aplicadas a um **mesmo capital**; e
 - ✓ Pelo **mesmo intervalo de tempo** (expresso em unidades diferentes):
 - Produzem o **mesmo volume de juros (J) / Montante (VF)**.



ESALQ

Taxas Equivalentes - JS



ESALQ

- Duas taxas, x e y, são equivalentes, no **regime de juros simples**, se:
 - Para intervalo de tempo **iguais**, medidos em unidades **diferentes**:

$$n_x \times i_x = n_y \times i_y$$

Em que: n_x = intervalo de tempo **medido no prazo de x**; i_x = taxa de juros mensurada no prazo de x; n_y = intervalo de tempo **medido no prazo de y**; e i_y = taxa de juros mensurada no prazo de y.



ESALQ

Observação Importante I



ESALQ

- No regime de juros simples:

- A taxas proporcionais (nominais ou lineares) são **taxas equivalentes!**



ESALQ

Exemplo VII



ESALQ

Calcule a taxa de juros semestral proporcional/equivalente a 60% ao ano e mostre a equivalência entre as taxas para um capital inicial de R\$ 100.

■ **Taxa semestral proporcional/equivalente:**

$$n_x \times i_x = n_y \times i_y = 1 \times i_{\text{semestral}} = 0,5 \times 60\% = 30\% \text{ a. s.}$$

■ **Equivalência:**

$$J = VP \times i \times n = 100 \times 0,6 \times 0,5 = 100 \times 0,3 \times 1 = \text{R\$ } 30$$

$$VF = VP \times (1 + i \times n) = 100 \times (1 + 0,6 \times 0,5) = 100 \times (1 + 0,3 \times 1) = \text{R\$ } 130$$



ESALQ

Exemplo VIII



ESALQ

Calcule a taxa de juros bimestral proporcional/equivalente a 9% ao mês e mostre a equivalência entre as taxas para um capital inicial de R\$ 100.

▪ **Taxa bimestral proporcional/equivalente:**

$$n_x \times i_x = n_y \times i_y = 1 \times i_{\text{bimestral}} = 2 \times 9\% = 18\% \text{ a. b.}$$

▪ **Equivalência:**

$$J = VP \times i \times n = 100 \times 0,09 \times 2 = 100 \times 0,18 \times 1 = \text{R\$ } 18$$

$$VF = VP \times (1 + i \times n) = 100 \times (1 + 0,09 \times 2) = 100 \times (1 + 0,18 \times 1) = \text{R\$ } 118$$



ESALQ

Equivalência Financeira



ESALQ

- Ocorre quando **dois ou mais capitais**:
 - ✓ Com **diferentes datas** de vencimento; e
 - ✓ Considerando a **mesma taxa de juros**;
- Produzem, em uma **mesma data (data focal)**, resultados **iguais**.



ESALQ

Equivalência Financeira



ESALQ

- Equação geral (juros simples) para **data focal = 0**:

$$\frac{C_1}{(1 + i \times t_1)} = \frac{C_2}{(1 + i \times t_2)} = \frac{C_3}{(1 + i \times t_3)} = \frac{C_n}{(1 + i \times t_n)}$$



ESALQ

Exemplo IX



ESALQ

Mostre que R\$ 438.080 vencíveis daqui a 8 meses é equivalente a se receber hoje R\$ 296.000, admitindo uma taxa de juros simples de 6% ao mês.



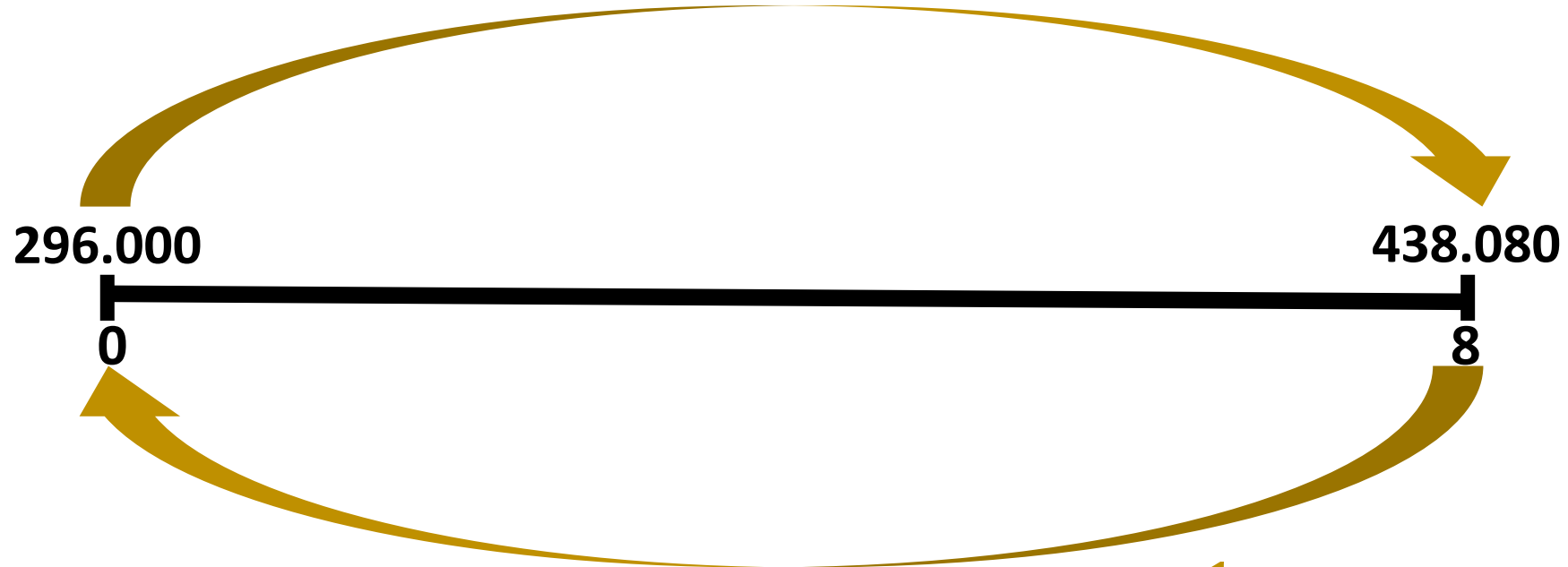
ESALQ

Exemplo IX



ESALQ

Data focal 8: $VF = 296.000 \times (1 + 0,06 \times 8)$



Data focal 0: $VP = 438.080 \times \frac{1}{(1 + 0,06 \times 8)}$



ESALQ

Observação Importante II



ESALQ

Na **equivalência financeira** em **juros simples**:

➤ Os prazos **não podem ser desmembrados** (fracionados) sob pena de alterar os resultados;

❖ **Por quê?**

- O fracionamento dos prazos resulta na incidência de juros sobre juros (capitalização composta).



ESALQ

Exemplo X



ESALQ

Admita um capital de R\$ 100 aplicado:

- (a) Durante dois anos à taxa de juros simples de 20% ao ano.
- (b) Durante 1 ano à taxa de juros simples de 20% ao ano, e, logo na sequência, aplicado por mais 1 ano à mesma taxa.



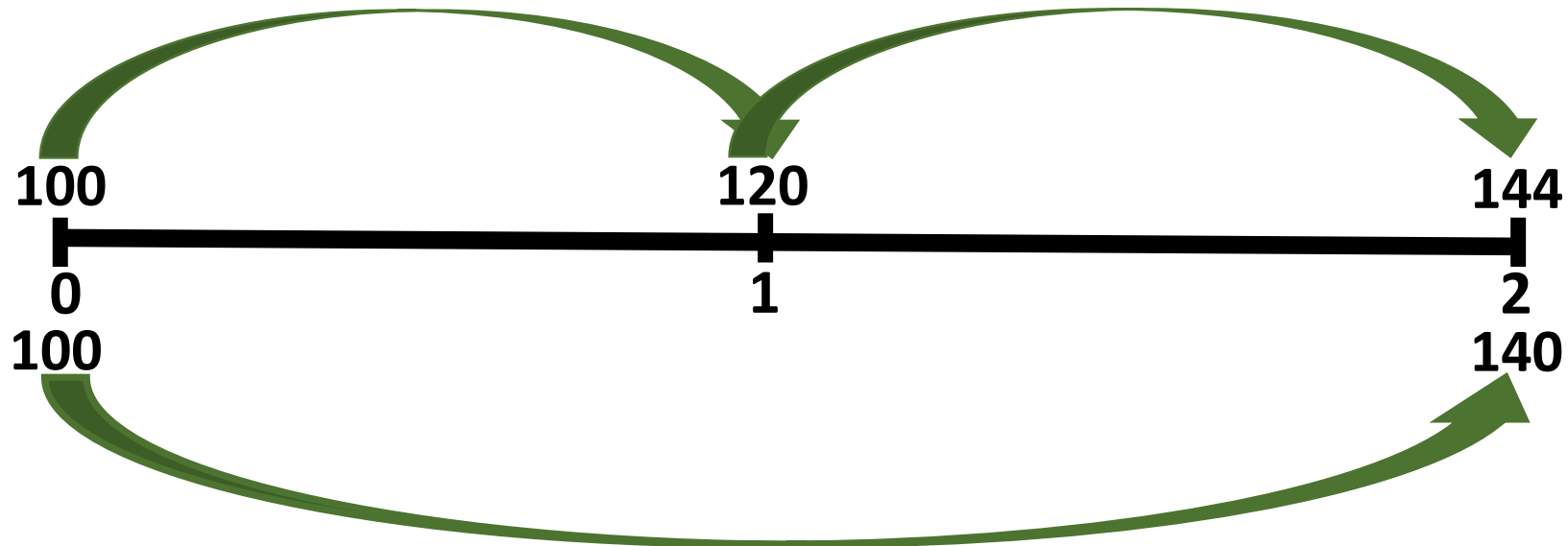
ESALQ

Exemplo IX



ESALQ

$$VF = 100 \times (1 + 0,2 \times 1) \quad VF = 120 \times (1 + 0,2 \times 1)$$



$$VF = 100 \times (1 + 0,2 \times 2)$$



ESALQ

Equivalência Financeira



ESALQ

❖ Consequência do problema de fracionamento de n para JS:

- A equivalência depende da data de comparação escolhida (**data focal**);
- A matemática financeira não consegue definir qual deve ser a **data focal**;
- ✓ **Na prática:** a definição da **data focal** em problemas de substituição de pagamentos no JS deve ser decidida entre as partes.



ESALQ

Exemplo XI - Fixação



ESALQ

Assuma que uma empresa deva ao banco os seguintes pagamentos:

- ✓ R\$ 50.000,00 em 4 meses; e
- ✓ R\$ 80.000,00 em 8 meses.



ESALQ

Exemplo XI - Fixação



ESALQ

O banco exige uma taxa de juros simples de 2,0% ao mês. Suponha que a empresa esteja avaliando um novo esquema de pagamento, em substituição ao original. **A proposta envolve pagar:**

- ✓ R\$ 10.000,00 hoje;
- ✓ R\$ 30.000,00 em 6 meses; e
- ✓ O restante em 12 meses.



ESALQ

Exemplo XI - Fixação



ESALQ

Calcule o pagamento restante após 12 meses para as seguintes datas focais:

(a) Hoje.

(b) Final do décimo segundo mês.

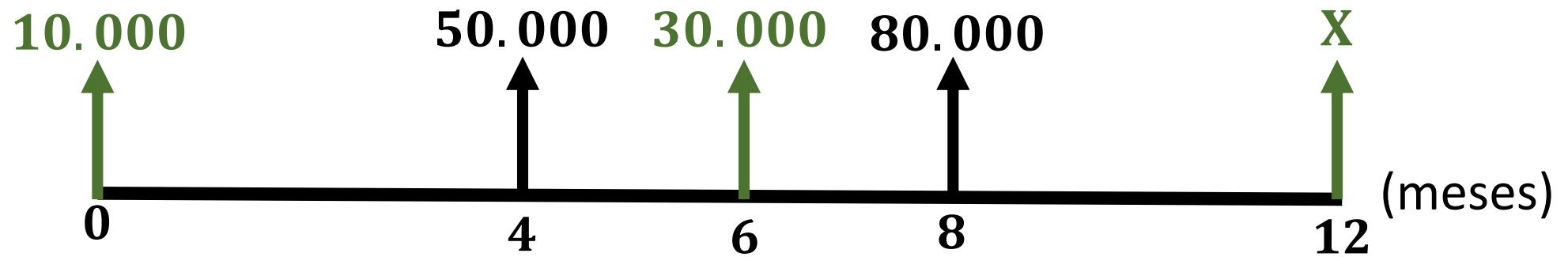


ESALQ

Exemplo XI (Banco)



ESALQ





ESALQ

Exemplo XI - Fixação



ESALQ

▪ Data focal $t = 0$:

$$\frac{50.000}{(1 + 0,02 \times 4)} + \frac{80.000}{(1 + 0,02 \times 8)} = 10.000 + \frac{30.000}{(1 + 0,02 \times 6)} + \frac{X}{(1 + 0,02 \times 12)}$$

$$46.296,30 + 65.965,50 = 10.000 + 26.785,70 + \frac{X}{1,24}$$

$$X = \text{R\$ } 97.310,40$$



ESALQ

Exemplo XI - Fixação



ESALQ

▪ **Data focal $t = 12$:**

- **Proposta original:**

$$VF = 50.000 \times (1 + 0,02 \times 8) + 80.000 \times (1 + 0,02 \times 4) = \text{R\$ } 144.400$$

- **Proposta alternativa:**

$$10.000 \times (1 + 0,02 \times 12) + 30.000 \times (1 + 0,02 \times 6) + X = 144.400$$

$$46.000 + X = 144.400$$

$$X = \text{R\$ } 98.400$$



ESALQ

Referências



ESALQ

ASSAF NETO, A. **Matemática financeira**: edição universitária. 2. ed. Barueri: Atlas, 2022.

VIEIRA SOBRINHO, J. D. **Matemática Financeira**. 8. ed. São Paulo: Atlas, 2023.