

Questões sobre os textos de Galileu, Leibniz e Euler, que tratam da matemática do movimento e fazem parte da construção da ideia de conservação no movimento

Duas Novas Ciências, Galileu (1638)

(Os trechos de Galileu selecionados no texto abaixo, apresentados em “itálico”, são compostos da tradução livre de trechos de Galileo Galilei, Dialogues Concerning Two New Sciences [1638], em

http://files.libertyfund.org/files/753/Galileo_0416_EBk_v6.0.pdf - acesso em 2/abril/2022

e de trechos reproduzidos de Galileu, Duas Novas Ciências, tradução Letizio Mariconda e Pablo R. Mariconda, Nova Stella Editorial e Ched Editorial.

..... representa texto omitido.

[...] representa texto acrescentado para melhor compreensão.)

1. Você concorda com a afirmação (abaixo) de Galileu de que não foi demonstrada, até o momento em que ele escreve, a proporção em que se produz a aceleração de um corpo?

TERCEIRA JORNADA

DO MOVIMENTO LOCAL

Vamos expor uma nova ciência a respeito de um tema muito antigo. Não existe na natureza nada anterior ao MOVIMENTO e, com referência a ele, não poucos e pequenos volumes foram escritos pelos filósofos; apesar disso, muitas propriedades dignas de serem conhecidas não foram até o momento observadas, nem demonstradas. Observaram-se algumas mais simples, como, por exemplo, que o movimento natural dos graves em queda livre se acelera continuamente; porém, não foi demonstrado até o momento a proporção, segundo a qual se produz sua aceleração.

.....

2. No texto abaixo, Galileu, através de Salviati, discute duas possibilidades: no movimento uniformemente acelerado, a velocidade é proporcional:

- à distância
- ao tempo

Qual(is) da(s) duas afirmações é verdadeira? Justifique sua resposta.

DO MOVIMENTO NATURALMENTE ACELERADO

(Salviati) posto que a natureza se serve de uma forma determinada de aceleração na queda dos graves, não é inconveniente estudar suas propriedades, fazendo com que nossa definição do movimento acelerado corresponda à essência do movimento naturalmente acelerado. O que acreditamos ter finalmente descoberto depois de longas reflexões; principalmente se levamos em conta que as propriedades por nós demonstradas parecem corresponder e coincidir com os resultados da experiência.

.....

Quando, portanto, observo uma pedra que cai de uma certa altura a partir do repouso e que adquire pouco a pouco novos acréscimos de velocidade, por que não posso acreditar que tais acréscimos de velocidade ocorrem segundo a proporção mais simples e mais óbvia?

.....

Pelo que agora me ocorre, parece-me que com maior clareza se poderia ter definido, sem alterar o conceito: um movimento uniformemente acelerado é aquele no qual a velocidade cresce em proporção ao espaço percorrido; de modo que, por exemplo, o grau de velocidade adquirido pelo móvel na queda de quatro braças seria o dobro daquele que teria se tivesse caído da altura de duas braças....

....

3. No texto abaixo, Galileu, através de Sagredo, refuta a possibilidade de que a velocidade seja proporcional à distância. Escreva o argumento de Sagredo através de equações, e deduza a relação entre velocidade e distância em um movimento acelerado. Você reconhece essa relação?

(Simplicio)acredito que um grave ao cair adquire força, aumentando sua velocidade proporcionalmente ao espaço....

.....

(Sagredo) Contudo, elas [as afirmações sobre a relação entre velocidade e distância percorrida] são tão falsas e impossíveis.... ..eis aqui uma clara demonstração. Quando as velocidades são proporcionais aos espaços percorridos,

esses espaços são percorridos em tempos iguais; se, portanto, as velocidades com as quais o móvel na queda percorreu o espaço de quatro braças forem o dobro das velocidades com as quais percorreu as duas primeiras braças, então os tempos de tais percursos serão iguais. Mas que um mesmo móvel atravesse no mesmo tempo as quatro braças e as duas é algo que não pode acontecer,....

.....

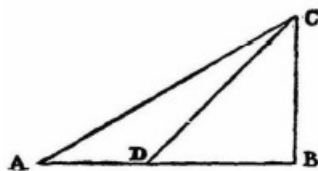
(Salviati) Aqui é objetivo do autor não mais que investigar e demonstrar algumas das propriedades do movimento acelerado (qualquer que seja sua causa), no qual a velocidade aumenta continuamente a partir do repouso inicial, em proporção simples ao tempo....; e se descobirmos que as propriedades, demonstradas adiante, se realizam na queda livre e acelerada dos corpos, poderemos concluirque sua velocidade aumenta [proporcionalmente] com o tempo e a duração do movimento.

(Sagredo) ... Chamamos movimento igualmente, ou seja, uniformemente acelerado, àquele que, partindo do repouso, adquire em tempos iguais momentos iguais de velocidade.

4. No texto abaixo, Galileu, através de Salviati, discute o movimento no plano inclinado. Qual é a preocupação de Sagredo? Por que Salviati propõe substituir o plano inclinado pelo pêndulo? O que o pêndulo demonstra? Escreva uma frase que represente a conclusão mais importante da experiência do pêndulo.

.....

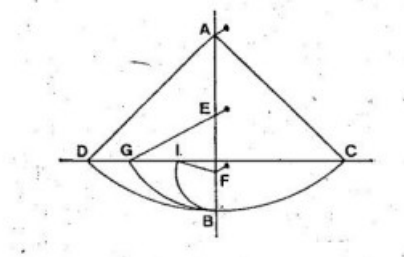
(Salviati)...Os graus de velocidade alcançados por um mesmo móvel em planos diferentemente inclinados são iguais quando as alturas desses planos são também iguais...



(Sagredo) Esta suposição me parece tão provável que merece ser aceita sem questionamento, desde que, é claro, não existam resistências externas, que os planos sejam duros e lisos, e que o corpo em movimento seja perfeitamente redondo,.... Retiradas toda resistência e oposição, minha razão me diz claramente que uma bola pesada e perfeitamente redonda que desça pelas linhas CA, CD, CB atingiria os pontos terminais A, D, B, com iguais momentos.

.....

.....(Salviati) Imaginem que esta folha de papel é um muro vertical e que de um prego fixado nele pende uma bola de chumbo , suspensa de um fio muito fino AB, com duas ou três braças de comprimento, perpendicular ao horizonte, e desenhem na parede uma linha horizontal DC que corta em ângulo reto a perpendicular AB, que estará separada da parede aproximadamente dois dedos.



Conduzindo posteriormente o fio AB com a bola até AC, soltem essa bola: num primeiro momento, veremos que ela desce descrevendo o arco CBD e ultrapassa o ponto B tanto que, percorrendo o arco BD, chegará quase à reta CD, não chegando a tocá-la por um pequeno intervalo, o que é causado pela resistência que opõem o ar e o fio. Disto podemos perfeitamente concluir que o ímpeto adquirido pela bola no ponto B, ao transpor o arco CB, foi suficiente para elevá-la segundo um arco similar BD à mesma altura. Após efetuar e repetir muitas vezes esta experiência, fixemos no muro, próximo à perpendicular AB, como por exemplo em E ou F, um prego que sobressai da parede cinco ou seis dedos, a fim de que o fio AC, voltando a conduzir como antes a bola C pelo arco CB, encontre, quando chegar a B, o prego E, sendo a bola obrigada a descrever a circunferência BG com centro em E.Constataremos então com prazer que a bola chega até a linha horizontal no ponto G, e o mesmo aconteceria, se o prego estivesse fixado mais abaixo, por exemplo, no ponto F....

.....

5. No texto abaixo, Galileu, através de Salviati, desenvolve um argumento para deduzir uma relação entre distância, velocidade e aceleração.

Represente a frase em termos de relações matemáticas e verifique se ela leva à relação conhecida entre estas três grandezas no movimento uniformemente acelerado.

(Salviati)

....

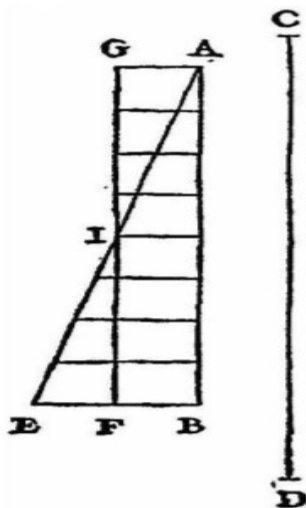
Teorema I, Proposição I

Se um corpo é uniformemente acelerado a partir do repouso, o tempo que [o corpo] leva para percorrer uma certa distância é o mesmo que o corpo levaria se percorresse a mesma distância com velocidade uniforme cujo valor fosse a média da maior velocidade e a velocidade antes do início da aceleração.

6. No texto abaixo, Galileu, através de Salviati, desenvolve um argumento para deduzir relações entre velocidade, distância percorrida e tempo.

De que forma ele desenvolve seus argumentos? Escreva algebricamente a descrição efetuada por Galileu em palavras.

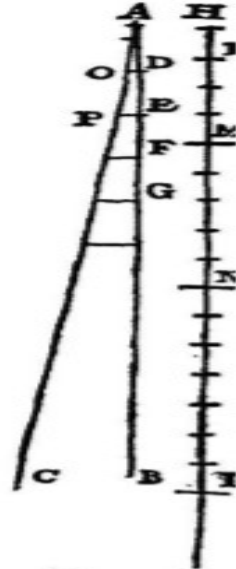
Vamos representar o tempo através da linha AB, tempo no qual é percorrido o espaço CD por um corpo que parte do repouso em C e é acelerado uniformemente; vamos representar o valor final e mais alto da velocidade ganha no intervalo AB pela linha EB, desenhada em ângulo reto com AB; desenhe a linha FG paralela à BA, e GA paralela à FB, formando o paralelogramo AGFB que terá área igual à do triângulo AEB, já que GF é a bissetriz do lado AE no ponto I; se estendermos as linhas paralelas no triângulo AEB até GI, a soma de todas as paralelas contidas no quadrilátero é igual à soma das [linhas contidas] no triângulo AEB; as [linhas] contidas no triângulo IEF são iguais às [linhas] contidas no triângulo GIA, ao passo que as [linhas] contidas no trapézio AIFB são comuns [ao triângulo AEB e ao paralelogramo ABFG]. Cada instante de tempo do intervalo AB tem seu ponto correspondente na linha AB; de cada ponto são desenhadas [retas] paralelas limitadas pelo triângulo AEB que representam valores crescentes da velocidade que aumenta; as [paralelas] contidas no retângulo representam valores de uma velocidade constante, que não aumenta; parece então que os momentos do corpo em movimento estão bem representados, no caso do movimento acelerado, pelas [retas] paralelas do triângulo AEB, e, no caso do movimento uniforme, pelas [retas] paralelas do retângulo GB. Pois os momentos que faltam na primeira parte do movimento acelerado (a parte faltante dos momentos são representadas pelas [retas] paralelas do triângulo AGI) é compensada pelos momentos representados pelas [retas] paralelas do triângulo IEF.



Teorema II, Proposição II

Os espaços percorridos por um corpo que cai a partir do repouso com movimento uniformemente acelerado estão um para o outro como os quadrados dos intervalos de tempo empregados na travessia destes espaço.

[Escreva a afirmação acima em linguagem matemática.]



Imagine que o tempo, com início em um instante qualquer A, seja representado por uma linha reta AB, sobre a qual tomamos dois intervalos de tempo quaisquer, AD e AE. Imagine que HI representa a distância percorrida por um corpo em queda a partir do repouso, em H, com aceleração uniforme. Se HL representa o espaço percorrido durante o intervalo de tempo AD, e HM [o espaço] percorrido durante o intervalo AE, então o espaço MH está para o espaço LH com uma razão que é o quadrado da razão do tempo AE para o tempo AD; ou podemos dizer simplesmente que as distâncias HM e HL estão relacionadas aos quadrados de AE e AD. Desenhe a linha AC que faz um ângulo qualquer com a linha AB; e dos pontos D e E, desenhe as linhas paralelas DO e EP; entre essas duas linhas, DO representa a maior velocidade adquirida durante o intervalo AD, ao passo que EP representa a máxima velocidade adquirida durante o intervalo AE. Mas acabamos de provar que, no que diz respeito às distâncias percorridas, estas são exatamente as mesmas, caso o corpo caia do repouso com aceleração uniforme, ou se cai pelo mesmo intervalo de tempo com velocidade constante, igual à metade da velocidade máxima adquirida na queda acelerada. Segue, portanto, que as distâncias HM e HL são as mesmas que seriam atravessadas nos intervalos AE e AD, com velocidades uniformes iguais à metade das [velocidades] representadas por DO e EP, respectivamente. Portanto, se podemos mostrar que as distâncias HM e HL estão na mesma razão que os quadrados dos intervalos de tempo AE e AD, nossa proposição está provada.

%%%

"Uma breve demonstração do memorável erro de Descartes e outros a respeito da lei natural de acordo com a qual eles afirmam que a mesma quantidade de movimento é sempre conservada por Deus, uma lei que usam incorretamente em problemas mecânicos", G.W. Leibniz (1686)
 (tradução livre a partir da versão em R. Bruce Lindsay, Energy: Historical Development of the Concept, Dowden 1975)

1. Como chamaríamos hoje o que Leibniz chama de “força” no texto a seguir? Escreva a relação matemática que ele descreve.

...Em segundo lugar, eu assumo que é necessário o mesmo trabalho para elevar o corpo A de uma libra até uma altura CD de 4 ells (unidade de comprimento) do que para elevar o corpo B de 4 libras a uma altura EF de 1 ell. Essas suposições são consideradas válidas pelos Cartesianos e outros filósofos e matemáticos de nossos tempos. Disto segue que ao cair da altura CD o corpo A vai adquirir exatamente a mesma força que o corpo B, ao cair da altura EF. Pois, após sua queda de C, o corpo A atinge D. Ali ele tem força suficiente para voltar a C, pela suposição 1, isto é, uma força suficiente para levantar uma massa de 1 libra a uma altura de 4 ells. Analogamente, depois de sua queda de E, o corpo B atinge F, onde tem força suficiente para voltar a E, pela hipótese 1, isto é, uma força suficiente para levantar uma massa de 4 libras a uma altura de 1 ell. Portanto, pela suposição 2, a força do corpo A na posição D é igual à força do corpo B na posição F.

2. Traduza as afirmações do texto de Leibniz abaixo em relações matemáticas. Que afirmações de Leibniz estão de acordo como nosso pensamento de hoje, e quais estariam “incorretas” na atualidade?

Agora vejamos se a quantidade de movimento é a mesma para os dois. Aqui, ao contrário do esperado, verificamos uma grande diferença. Esclareço a seguir. Foi demonstrado por Galileo que a velocidade adquirida na queda CD é duas vezes maior que a velocidade adquirida na queda EF. Multipliquemos então a massa do corpo A, que é 1, pela velocidade adquirida por ele, que podemos admitir igual a 2; o produto, ou quantidade de movimento, é 2. Agora multipliquemos a massa de B, que é 4, por sua velocidade adquirida, que é 1. O produto, ou quantidade de movimento, é 4. Portanto a quantidade de movimento de A na posição D é metade da quantidade de movimento de B na posição F. No entanto, anteriormente as forças de ambos foram encontradas iguais. Assim há uma grande discrepância entre a vis motrix e a quantidade de movimento.

%%%%%%%%%

"Investigações sobre a origem das forças", de Leonard Euler (1752)

(tradução livre a partir da versão em R. Bruce Lindsay, *Energy: Historical Development of the Concept*, Dowden 1975)

1. Represente em uma figura as grandezas descritas no parágrafo 36 e obtenha a equação deste parágrafo.
2. Que forças Leibniz compara no parágrafo 37, e por que diz que são iguais?
3. Qual é o “princípio da mecânica” utilizado no parágrafo 39?
4. Qual é o princípio representado pela equação

$$Av + Bu = Aa + Bb,$$

na teoria física atual?

5. Qual é o princípio representado pela equação

$$Avv + Buu = Aaa + Bbb - 2 \int Pdz,$$

na teoria física atual? Traduza em linguagem matemática atual e discuta se a física contida nesta equação costuma ser discutida nos textos de Física Básica.