

3 Lista de Exercícios, Álgebra 1

Para entregar 18 de abril

Exercício 1)

Sejam A e B conjuntos finitos com m e n elementos respectivamente. Mostre que o número de funções de A em B é m^n .

(Sugestão: indução em n)

Exercício 2: Encontre uma fórmula fechada para a soma $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

Prove que sua fórmula está correta.

Exercício 3: Mostre que para todo $m \in \mathbb{N}$ vale:

a) $9 \mid 10^m - 1$

d) $6 \mid 5^{2m+1} + 1$

b) $3 \mid 10^m - 7^m$

e) $5 \mid m^2 - m$

c) $8 \mid 3^{2m} - 1$

~~$5 \mid 3^m + 2^m$ (se m é ímpar)~~

Exercício 4: a) Mostre que a é par $\Leftrightarrow a^2$ é par

b) mostre que se $b \neq 0$ então a equação $x^2 = 2b^2$ não tem solução em \mathbb{Z}

EX 5Seja F_n a sequência de inteiros

assim definida:

$$F_1 = 1 \quad F_2 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{para } n \geq 3$$

Prove os seguintes resultados ou dê contra exemplos:

$$a) F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-3} + F_{2n-1} = F_{2n}$$

$$b) F_{m+n} = F_{m-1} F_m + F_n F_{m+1} \quad \text{para } m \geq 2, n \geq 1$$

$$c) F_{n+1}^2 = F_{n+2} F_n + (-1)^n \quad \text{para } n \geq 1$$

EX 6: Seja $P = \{a \in \mathbb{Z} : a > 0\}$ Prove (usando os axiomas)

$$a) (a \in P \text{ e } b \in P) \Rightarrow (a+b) \in P$$

$$b) (a \in P \text{ e } P \in P) \Rightarrow ab \in P.$$

c) Para todo inteiro a vale exatamente uma das afirmações ($a=0$ ou $a \in P$ ou $-a \in P$)

EX 7: Sejam p_1, \dots, p_k inteiros maiores que 1 e $n = p_1 \dots p_k + 1$

Prove que para $1 \leq i \leq k$, $p_i \nmid n$.

Exercício 8 Seja $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função tal que:

1) $f(1) = 1$

2) $f(a+b) = f(a) + f(b)$ para quaisquer a, b inteiros.

Prove que $f(x) = x$ para todo x inteiro.