FENÔMENOS DE TRANSPORTE I

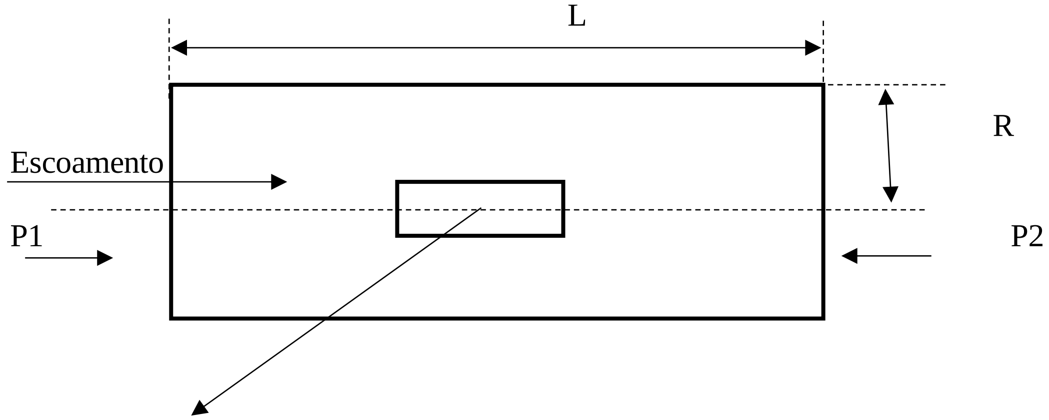
LISTA 1 – EXERCÍCIO 1:

Um fluído newtoniano incompressível, de densidade ρ e viscosidade μ, escoa em estado estacionário, regime laminar, escoamento desenvolvido unidimensional, à temperatura constante, no interior de um tubo circular horizontal, de raio interno constante R e comprimento L. As pressões na entrada e na saída do tubo são iguais a P_1 e P_2respectivamente.

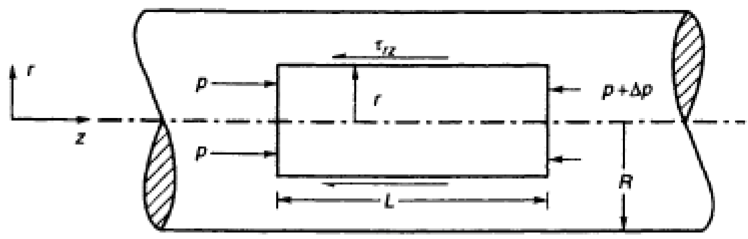
Determinar (a) o perfil da tensão de cisalhamento; (b) a tensão de cisalhamento no centro do tubo; (c) o perfil de velocidade; (d) a velocidade no centro do tubo; (e) a velocidade média de escoamento; (f) a vazão volumétrica de escoamento; (g) a vazão mássica de escoamento; (h) As expressões obtidas valem para o escoamento num tubo vertical? Justificar todas as passagens da solução.

SOLUÇÃO:

a)o perfil da tensão de cisalhamento:



Elemento de fluido com raio r e comprimento l

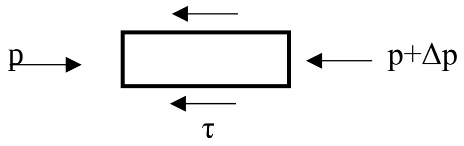


Como o fluido escoa em estado estacionário, não há aceleração. Logo, a resultante das forças que atuam sobre o elemento de fluido deve ser nula:

$$\sum \vec{F} = 0$$

As "forças" que agem sobre o elemento de fluido são:

τ



τ é a tensão de cisalhamento exercida pelo fluido sobre o elemento de fluido.

Fazendo-se o balanço de forças:

$$p\pi r^2 - (p + \Delta p)\pi r^2 - \tau 2\pi r l = 0$$

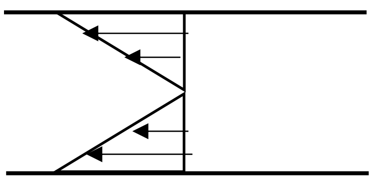
Que resulta em:

$$\tau = -\frac{\Delta p r}{2l}$$

como a tensão de cisalhamento varia radialmente, estendemos o elemento de fluido até a entrada e saída da tubulação de forma que:

$$\tau = -\frac{(\Delta P)r}{2L} = \frac{(P_1 - P_2)r}{2L}$$

O perfil pode ser representado graficamente por:



(b) a tensão de cisalhamento no centro do tubo:

Da equação do perfil, para r=R

$$\tau = -\frac{(\Delta P)R}{2L} = \frac{(P_1 - P_2)R}{2L}$$

Destaca-se que no centro, para r=0, τ=0.

(c) o perfil de velocidade:

Por tratar-se de um fluido newtoniano escoando em regime laminar:

$$\tau = -\mu\frac{dv}{dr}$$

Do item anterior:

$$\tau = -\frac{(\Delta \mathrm{P})r}{2\mathrm{L}} = \frac{(\mathrm{P_1} - \mathrm{P_2})\mathrm{r}}{2\mathrm{L}}$$

Igualando-se as duas expressões para a tensão de cisalhamento:

$$-\mu\frac{\mathrm{dv}}{\mathrm{dr}} = \frac{(\mathrm{P_1} - \mathrm{P_2})\mathrm{r}}{2\mathrm{L}}$$

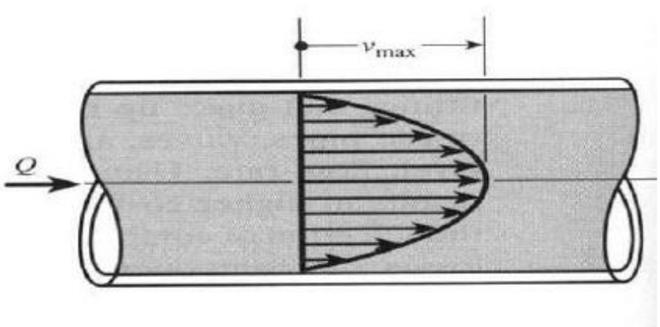
Separando-se as variáveis e fazendo-se a integração:

$$-\int_{\mathrm{v}}^{0} \mathrm{dv} = \int_{\mathrm{r}}^{\mathrm{R}} \frac{(\mathrm{P_1} - \mathrm{P_2})\mathrm{r}}{2\mu\mathrm{L}}\mathrm{dr}$$

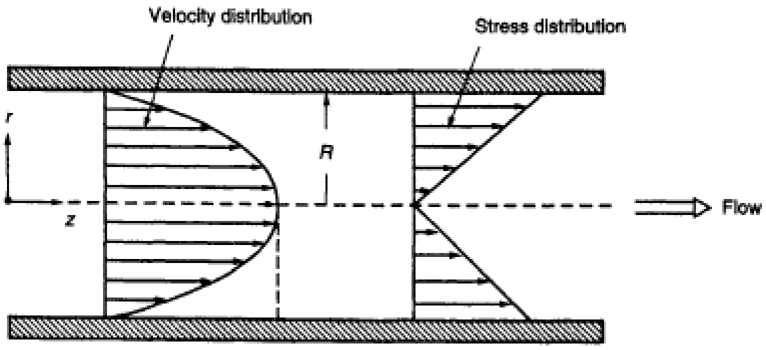
Que resulta em:

$$\mathrm{v} = \frac{(\mathrm{P_1} - \mathrm{P_2})\mathrm{R}^2}{4\mu\mathrm{L}}\left[1 - \left(\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{R}}\right)^2\right]$$

Perfil de velocidade



O perfil é parabólico e de acordo com o perfil da tensão de cisalhamento:
-velocidade nula na parede → máxima tensão de cisalhamento;
-velocidade máxima no centro → tensão de cisalhamento nula.



(d) a velocidade no centro do tubo
Para r=0:

$$v = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{4\mu L} = v_{max}$$

Pode-se então escrever o perfil de velocidade como:

$$v = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{4\mu L}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] = v_{max}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]$$

(e) a velocidade média de escoamento:

Para a velocidade média, considere-se que:

$$\dot{m} = \rho VA$$

Se for considerado um ponto no perfil de velocidades:

$$d\dot{m} = \rho v dA$$

Assim:

$$\dot{m} = \rho VA = \int d\dot{m} = \int \rho v dA$$

Assim:

$$\rho VA = \int \rho v dA$$

Ou seja:

$$V = \frac{1}{A}\int v dA$$

Um elemento de área diferencial em coordenadas cilíndricas:

$$dA = r dr d\theta$$

Assim:

$$V = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{\theta=0;r=0}^{\theta=2\pi;r=R} v r dr d\theta$$

Ou ainda:

$$V = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{\theta=0;r=0}^{\theta=2\pi;r=R} v_{max} \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] r dr d\theta$$

Da integração obtém-se:

$$\frac{V}{v_{max}} = \frac{1}{2}$$

Ou ainda:

$$V = \frac{(P_1 - P_2)R^2}{8\mu L}$$

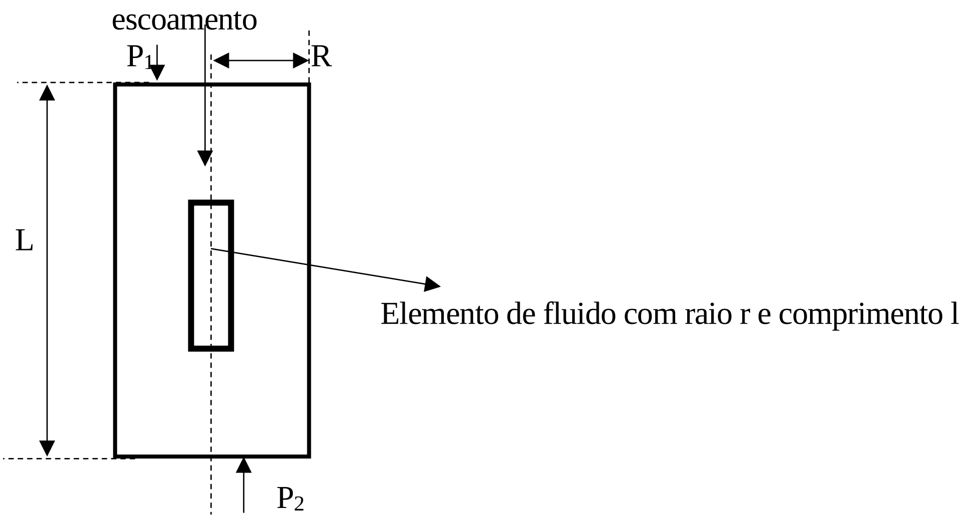
(f) a vazão volumétrica de escoamento:

$$\dot{q} = VA = \pi \frac{(P_1 - P_2)R^4}{8\mu L}$$

(g) a vazão mássica de escoamento:

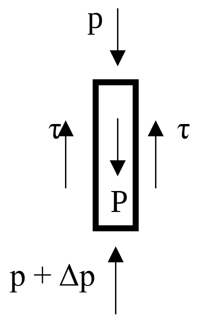
$$\dot{m} = \rho q = \rho\pi \frac{(P_1 - P_2)R^4}{8\mu L}$$

(h) As expressões obtidas valem para o escoamento num tubo vertical?



Como anteriormente, considerando um elemento de fluido e pelo fato de o escoamento estar em regime permanente:

$$\sum \vec{F} = 0$$



em que:
p = pressão;
τ = tensão de cisalhamento;
P = força peso.

A força peso pode ser escrita em função dos elementos geométricos do elemento de fluido:

$P = mg = \rho Vg = \rho\pi r^2 lg$
Assim, o balanço de força fica como:

$$p\pi r^2 + \rho\pi r2lg - (p + \Delta p)\pi r^2 - \tau 2\pi rl = 0$$

ou:

$$\tau = \frac{(\rho lg - \Delta p)r}{2l}$$

Aumentando o elemento de fluido até chegar às pontas:

$$\tau = \frac{(\rho Lg - \Delta P)r}{2L}$$

O termo ρLg corresponde à pressão estática de uma coluna de líquido de altura L, na base do tubo vertical. Se for considerado que no topo do tubo, essa pressão corresponde a $\rho.0.g = 0$, pode-se fazer a seguinte transformação na equação obtida:

$$\tau = \frac{[(P_1 - \rho 0g) - (P_{2-} - \rho Lg)]r}{2L} = \frac{(\boldsymbol{P_1} - \boldsymbol{P_2})}{2L} r$$

em que:

$$\boldsymbol{P_i} = P_i - \rho Lg$$

Que é a chamada pressão piezométrica ou modificada. Desta forma, todas as equações escritas anteriormente são válidas, considerando-se a pressão piezométrica.