



EESC • USP

Escola de Engenharia de São Carlos
Universidade de São Paulo



SEP0506 – Sistemas de Apoio à Decisão

AHP - Analytic Hierarchy Process

Prof. Luiz C. R. Carpinetti



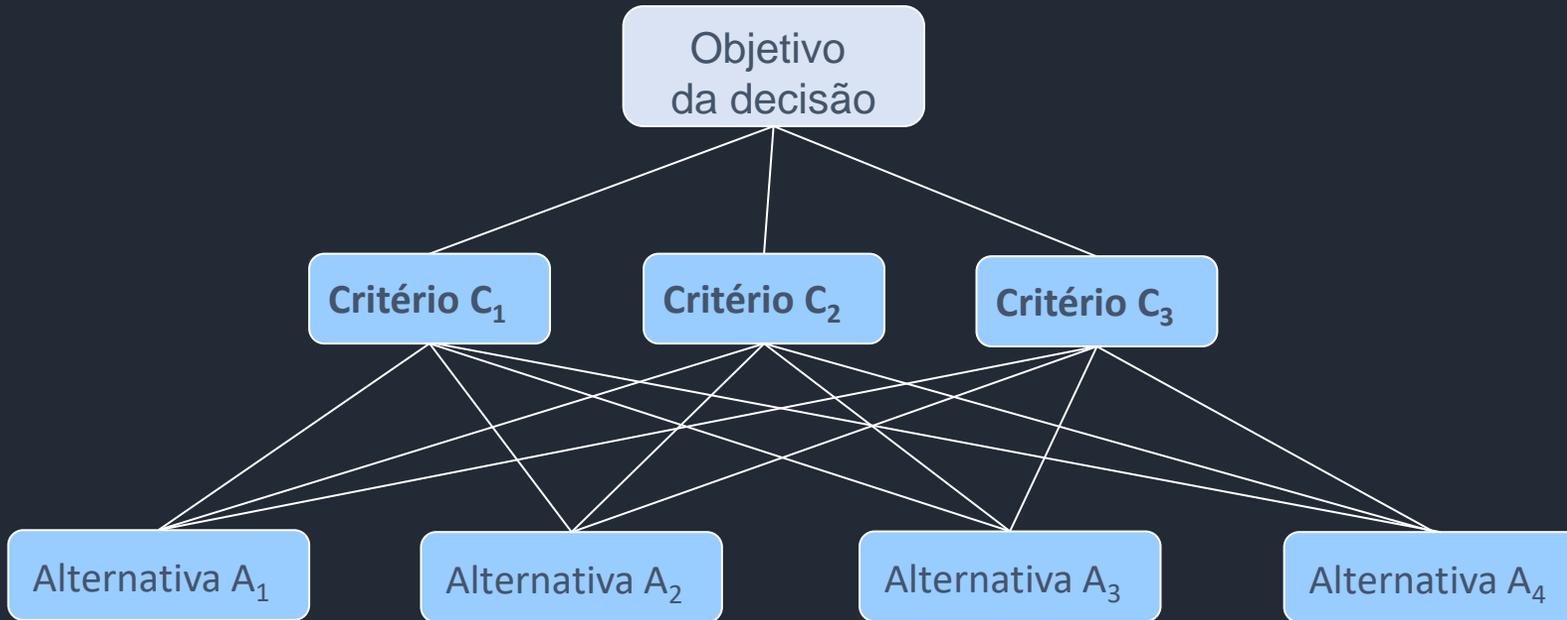
Except where otherwise noted, this work is licensed under
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>

Método AHP (*Analytic Hierarchy Process*)

- Proposto por Saaty (*SAATY, T. L. The Analytic Network Process. 1 ed. McGraw Hill: New York, 1980*);
- Técnica de priorização de alternativas a partir da avaliação comparativa, par-a-par, do desempenho das alternativas em cada um dos critérios de decisão;

Método AHP (*Analytic Hierarchy Process*)

- Problema de decisão representado em uma hierarquia de níveis: objetivo, critérios e alternativas;



Método AHP (*Analytic Hierarchy Process*)

- É adequado também para situações em que os critérios são avaliados a partir de julgamentos subjetivos;
- A partir de comparações par-a-par, definem-se:
 - Importância comparativa dos critérios (pesos);
 - Desempenho comparativo das alternativas nos critérios.

Escala comparativa proposta por Saaty

Pontuação	Definição	Explicação
1	Igual importância	Critérios/alternativas contribuem igualmente para objetivo
2	Fraco	
3	Importância moderada	Leve preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
4	Moderada <i>plus</i>	
5	Importância forte	Forte preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
6	Forte plus	
7	Muito forte	Muito forte preferência, dominância demonstrada
8	Muito muito forte	
9	Importância extrema	A preferência é a da mais alta ordem possível

Saaty, T. Decision making with the AHP. Int. J. Service Science, vol. 1, no 1, 2008.

Escala comparativa proposta por Saaty - Exemplo

Pontuação	Definição	Explicação
1	Igual importância	Critérios/alternativas contribuem igualmente para objetivo
2	Fraco	
3	Importância moderada	Leve preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
4	Moderada <i>plus</i>	
5	Importância forte	Forte preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
6	Forte plus	
7	Muito forte	Muito forte preferência, dominância demonstrada
8	Muito muito forte	
9	Importância extrema	A preferência é a da mais alta ordem possível

	A1	A2	A3	A4
A1	1	1/2	3	1/7
A2	2	1	2	1/5
A3	1/3	1/2	1	1/8
A4	7	5	8	1

$A_2 > A_1 \rightarrow 2 > 1$

Escala comparativa proposta por Saaty - Exemplo

Pontuação	Definição	Explicação
1	Igual importância	Critérios/alternativas contribuem igualmente para objetivo
2	Fraco	
3	Importância moderada	Leve preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
4	Moderada <i>plus</i>	
5	Importância forte	Forte preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
6	Forte plus	
7	Muito forte	Muito forte preferência, dominância demonstrada
8	Muito muito forte	
9	Importância extrema	A preferência é a da mais alta ordem possível

	A1	A2	A3	A4
A1	1	1/2	3	1/7
A2	2	1	2	1/5
A3	1/3	1/2	1	1/8
A4	7	5	8	1

$A_1 > A_3 \rightarrow 3 > 1$

Escala comparativa proposta por Saaty - Exemplo

Pontuação	Definição	Explicação
1	Igual importância	Critérios/alternativas contribuem igualmente para objetivo
2	Fraco	
3	Importância moderada	Leve preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
4	Moderada <i>plus</i>	
5	Importância forte	Forte preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
6	Forte plus	
7	Muito forte	Muito forte preferência, dominância demonstrada
8	Muito muito forte	
9	Importância extrema	A preferência é a da mais alta ordem possível

	A1	A2	A3	A4
A1	1	1/2	3	1/7
A2	2	1	2	1/5
A3	1/3	1/2	1	1/8
A4	7	5	8	1

$A_4 > A_1 \rightarrow 7 > 1$

Escala comparativa proposta por Saaty - Exemplo

Pontuação	Definição	Explicação
1	Igual importância	Critérios/alternativas contribuem igualmente para objetivo
2	Fraco	
3	Importância moderada	Leve preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
4	Moderada <i>plus</i>	
5	Importância forte	Forte preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
6	Forte plus	
7	Muito forte	Muito forte preferência, dominância demonstrada
8	Muito muito forte	
9	Importância extrema	A preferência é a da mais alta ordem possível

	A1	A2	A3	A4
A1	1	1/2	3	1/7
A2	2	1	2	1/5
A3	1/3	1/2	1	1/8
A4	7	5	8	1

$A_2 > A_3 \rightarrow 2 > 1$

Escala comparativa proposta por Saaty - Exemplo

Pontuação	Definição	Explicação
1	Igual importância	Critérios/alternativas contribuem igualmente para objetivo
2	Fraco	
3	Importância moderada	Leve preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
4	Moderada <i>plus</i>	
5	Importância forte	Forte preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
6	Forte <i>plus</i>	
7	Muito forte	Muito forte preferência, dominância demonstrada
8	Muito muito forte	
9	Importância extrema	A preferência é a da mais alta ordem possível

	A1	A2	A3	A4
A1	1	1/2	3	1/7
A2	2	1	2	1/5
A3	1/3	1/2	1	1/8
A4	7	5	8	1

$A_4 > A_2 \rightarrow 5 > 1$

Escala comparativa proposta por Saaty - Exemplo

Pontuação	Definição	Explicação
1	Igual importância	Critérios/alternativas contribuem igualmente para objetivo
2	Fraco	
3	Importância moderada	Leve preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
4	Moderada <i>plus</i>	
5	Importância forte	Forte preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
6	Forte plus	
7	Muito forte	Muito forte preferência, dominância demonstrada
8	Muito muito forte	
9	Importância extrema	A preferência é a da mais alta ordem possível

	A1	A2	A3	A4
A1	1	1/2	3	1/7
A2	2	1	2	1/5
A3	1/3	1/2	1	1/8
A4	7	5	8	1

$A_4 > A_3 \rightarrow 8 > 1$

Matriz de comparação par-a-par

	A1	A2	A3	A4
A1	1	1/2	3	1/7
A2	2	1	2	1/5
A3	1/3	1/2	1	1/8
A4	7	5	8	1

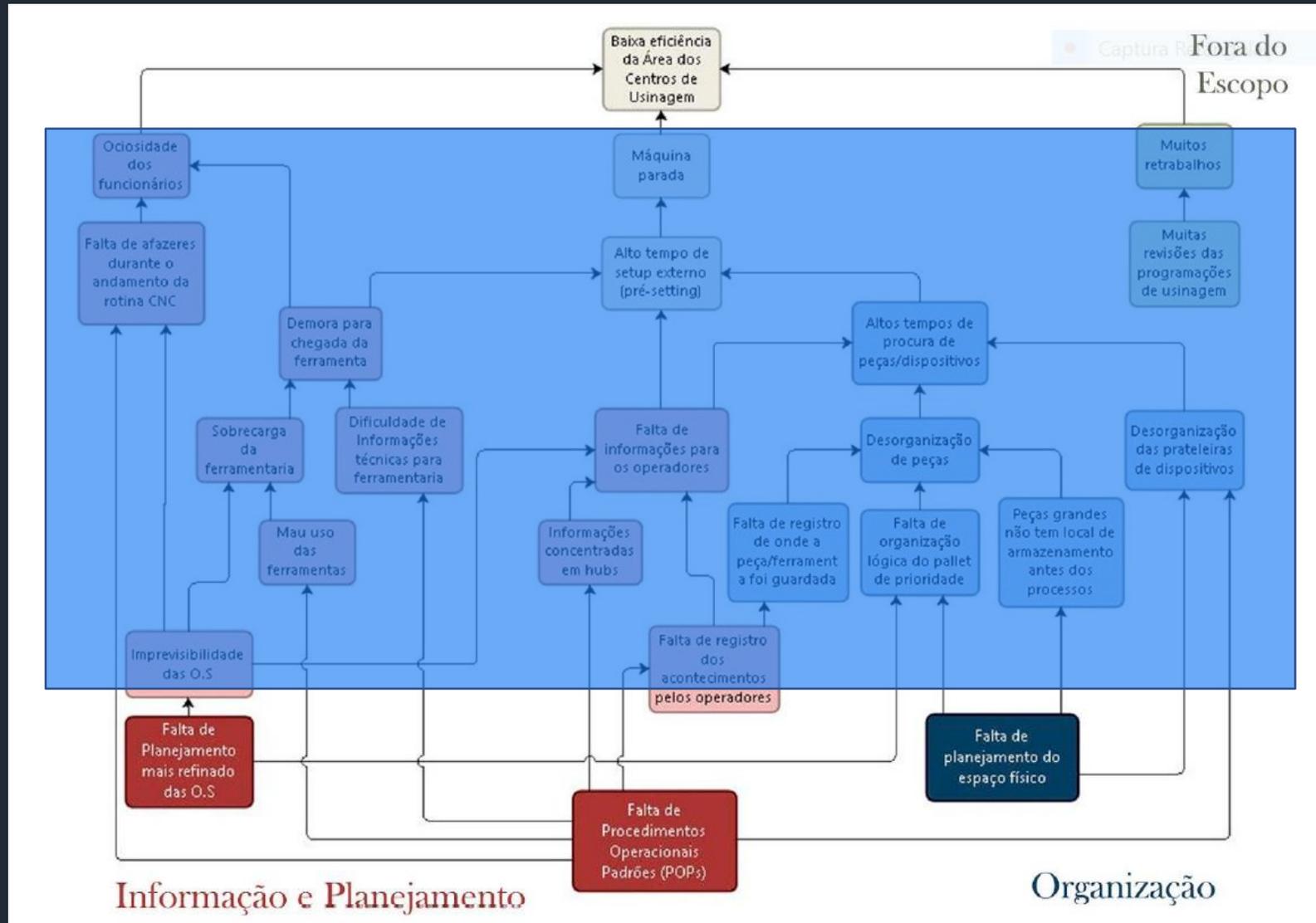
$$W = [W_i/W_j] = \begin{pmatrix} W_1/W_1 & W_1/W_2 & \dots & W_1/W_n \\ W_2/W_1 & W_2/W_2 & \dots & W_2/W_n \\ \vdots & \vdots & & \\ W_n/W_1 & W_n/W_2 & \dots & W_n/W_n \end{pmatrix}$$

Matriz de comparação par-a-par

	A1	A2	A3	A4
A1	1	1/2	3	1/7
A2	2	1	2	1/5
A3	1/3	1/2	1	1/8
A4	7	5	8	1

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Exemplo de aplicação: priorização de problema



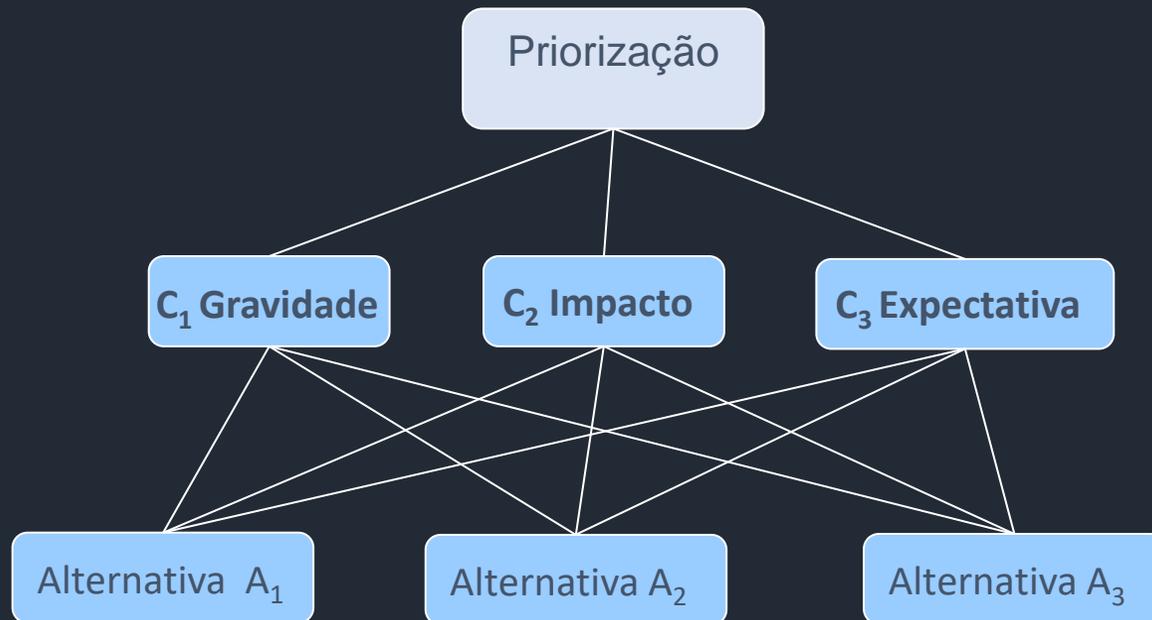
Problemas para priorização

- A1 – Falta de planejamento mais refinado das ordens de serviço;
- A2 – Falta de procedimentos operacionais padrões (POPs);
- A3 – Falta de planejamento/organização do espaço físico;
- Todos esses problemas (causas raízes) causando perda de eficiência, desperdícios, erros, perda de produtividade etc

Critérios de priorização

- **Critério C1: Gravidade** das consequências (desperdícios, erros, ineficiência, produtividade etc);
- **Critério C2: Impacto** esperado com a eliminação do problema;
- **Critério C3: Expectativa** dos stakeholders sobre a necessidade de solução desse problema.

AHP – Hierarquia de decisão



- A1 – Falta de planejamento mais refinado das ordens de serviço;
- A2 – Falta de procedimentos operacionais padrões (POPs);
- A3 – Falta de planejamento/organização do espaço físico;

Matriz de comparação dos critérios

	C1	C2	C3
C1 Gravidade	1	1	1/2
C2 Impacto	1	1	1/2
C3 Expectativa	2	2	1

Pontuação	Definição	Explicação
1	Igual importância	Critérios/alternativas contribuem igualmente para objetivo
2	Fraco	
3	Importância moderada	Leve preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
4	Moderada <i>plus</i>	
5	Importância forte	Forte preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
6	Forte <i>plus</i>	
7	Muito forte	Muito forte preferência, dominância demonstrada
8	Muito muito forte	
9	Importância extrema	A preferência é a da mais alta ordem possível

Cálculo da importância relativa dos critérios

	C1	C2	C3	Peso (W_{c_i})
C1 Gravidade	1,000	1,000	0,500	2,500
C2 Impacto	1,000	1,000	0,500	2,500
C3 Expectativa	2,000	2,000	1,000	5,000

$$W_{c_i} = \sum_{j=1}^n a_{ij}$$

$$W_{c_1} = 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2,5$$

$$W_{c_2} = 1 + 1 + \frac{1}{2} = 2,5$$

$$W_{c_3} = 2 + 2 + 1 = 5,0$$

Cálculo da importância relativa dos critérios (normalizada)

	C1	C2	C3	Peso (Wci)	Norm. (Wcni)
C1 Gravidade	1,00	1,00	0,50	2,500	0,25
C2 Impacto	1,00	1,00	0,50	2,500	0,25
C3 Expectativa	2,00	2,00	1,00	5,000	0,50

$$Wcni = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}}$$

$$Wcn_1 = \frac{2,5}{2,5 + 2,5 + 5,0} = 0,25$$

$$Wcn_2 = \frac{2,5}{2,5 + 2,5 + 5,0} = 0,25$$

$$Wcn_3 = \frac{5,0}{2,5 + 2,5 + 5,0} = 0,5$$

Análise de consistência das avaliações par-a-par

Baseado no CR: consistency ratio, calculado por:

$$CR = \frac{CI}{RI}$$

Onde:

CI: Consistency Index;

RI: Random consistency Index. Tabelado, valor médio de CI para matrizes aleatórias usando a escala proposta por Saaty (de 1 a 9).

Análise de consistência das avaliações par-a-par

Consistency Index – CI - calculado como:

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{(n-1)}$$

Onde:

n : ordem da matriz de comparações;

λ_{max} : autovalor máximo da matriz de comparações, A .

$$\lambda_{max} = Média [\lambda]$$

$$Aw = \lambda w \quad \lambda = \left[\frac{A * W_n}{W_n} \right]$$

Cálculo de CR da matriz de critérios

1. Cálculo de λ_{max}

$$A * W_n = \begin{bmatrix} 1,00 & 1,00 & 0,50 \\ 1,00 & 1,00 & 0,50 \\ 2,00 & 2,00 & 1,00 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,50 \end{bmatrix}$$

$$A * W_n = \begin{bmatrix} 0,75 \\ 0,75 \\ 1,50 \end{bmatrix}$$

Cálculo de CR da matriz de critérios

1. Cálculo de $\left[\frac{A * W_n}{W_n} \right]$

$$\left[\frac{A * W_n}{W_n} \right] = \frac{\begin{bmatrix} 0,75 \\ 0,75 \\ 1,50 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 0,25 \\ 0,25 \\ 0,50 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} 3,0 \\ 3,0 \\ 3,0 \end{bmatrix} = \lambda$$

Cálculo de CR da matriz de critérios

1. Cálculo de

$$CR = \frac{\lambda_{max} - n}{(n-1) * RI}$$

$$\lambda_{max} = Média [\lambda] \quad \lambda_{max} = \frac{3+3+3}{3} = 3$$

<i>n</i>	RI
3	0,52
4	0,89
5	1,11
6	1,25
7	1,35
8	1,4
9	1,45


$$CR = \frac{3-3}{(3-1)*0,52} = 0$$

$$CR \leq 0,10$$

Matriz de comparação das alternativas no Critério C_1 – Gravidade

	A1	A2	A3
A1	1,00	4,00	6,00
A2	0,25	1,00	2,00
A3	0,17	0,50	1,00

- A1 – Falta de planejamento mais refinado das ordens de serviço;
- A2 – Falta de procedimentos operacionais padrões (POPs);
- A3 – Falta de planejamento/organização do espaço físico;

Pontuação	Definição	Explicação
1	Igual importância	Critérios/alternativas contribuem igualmente para objetivo
2	Fraco	
3	Importância moderada	Leve preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
4	Moderada <i>plus</i>	
5	Importância forte	Forte preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
6	Forte <i>plus</i>	
7	Muito forte	Muito forte preferência, dominância demonstrada
8	Muito muito forte	
9	Importância extrema	A preferência é a da mais alta ordem possível

Cálculo da importância relativa das alternativas no Critério C_1 – Gravidade

	A1	A2	A3	Peso (W_{ci})	Norm. (W_{cni})
A1	1,00	4,00	6,00	11,00	0,691
A2	0,25	1,00	2,00	3,25	0,204
A3	0,17	0,50	1,00	1,67	0,105

$$W_{cni} = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}}$$

$$W_{cn_1} = \frac{11}{11 + 3,25 + 1,67} = 0,691$$

$$W_{cn_2} = \frac{3,25}{11 + 3,25 + 1,67} = 0,204$$

$$W_{cn_3} = \frac{1,67}{11 + 3,25 + 1,67} = 0,105$$

Análise de consistência da Matriz de comparação das alternativas no Critério C_1 – Gravidade

	A1	A2	A3
A1	1,00	4,00	6,00
A2	0,25	1,00	2,00
A3	0,17	0,50	1,00

$$\lambda_{max} = 3,013$$

$$CR = \frac{\lambda_{max} - n}{(n-1) * RI} = \frac{3,013 - 3}{(3-1) * 0,52} = 0,012$$

$$CR \leq 0,10$$

Matriz de comparação das alternativas no Critério C_2 – Impacto

	A1	A2	A3
A1	1,00	5,00	7,00
A2	0,20	1,00	2,00
A3	0,14	0,50	1,00

- A1 – Falta de planejamento mais refinado das ordens de serviço;
- A2 – Falta de procedimentos operacionais padrões (POPs);
- A3 – Falta de planejamento/organização do espaço físico;

Pontuação	Definição	Explicação
1	Igual importância	Critérios/alternativas contribuem igualmente para objetivo
2	Fraco	
3	Importância moderada	Leve preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
4	Moderada <i>plus</i>	
5	Importância forte	Forte preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
6	Forte plus	
7	Muito forte	Muito forte preferência, dominância demonstrada
8	Muito muito forte	
9	Importância extrema	A preferência é a da mais alta ordem possível

Cálculo da importância relativa das alternativas no Critério C₂ – Impacto

	A1	A2	A3	Peso (Wci)	Norm. (Wcni)
A1	1,00	5,00	7,00	13,00	0,729
A2	0,20	1,00	2,00	3,20	0,179
A3	0,14	0,50	1,00	1,64	0,092

$$Wcn_i = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}}$$

$$Wcn_1 = \frac{13}{13 + 3,2 + 1,64} = 0,729$$

$$Wcn_2 = \frac{3,2}{13 + 3,2 + 1,64} = 0,179$$

$$Wcn_3 = \frac{1,64}{13 + 3,2 + 1,64} = 0,092$$

Análise de consistência da Matriz de comparação das alternativas no Critério C_2 – Impacto

	A1	A2	A3
A1	1,00	5,00	7,00
A2	0,20	1,00	2,00
A3	0,14	0,50	1,00

$$\lambda_{max} = 3,02$$

$$CR = \frac{\lambda_{max} - n}{(n-1) * RI} = \frac{3,02 - 3}{(3-1) * 0,52} = 0,019$$

$$CR \leq 0,10$$

Matriz de comparação das alternativas no Critério C_3 – Expectativa

	A1	A2	A3
A1	1,00	1,00	4,00
A2	1,00	1,00	4,00
A3	0,25	0,25	1,00

- A1 – Falta de planejamento mais refinado das ordens de serviço;
- A2 – Falta de procedimentos operacionais padrões (POPs);
- A3 – Falta de planejamento/organização do espaço físico;

Pontuação	Definição	Explicação
1	Igual importância	Critérios/alternativas contribuem igualmente para objetivo
2	Fraco	
3	Importância moderada	Leve preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
4	Moderada <i>plus</i>	
5	Importância forte	Forte preferência de um critério/alternativa em relação ao outro
6	Forte plus	
7	Muito forte	Muito forte preferência, dominância demonstrada
8	Muito muito forte	
9	Importância extrema	A preferência é a da mais alta ordem possível

Cálculo da importância relativa das alternativas no Critério C_3 – Expectativa

	A1	A2	A3	Peso (W_{ci})	Norm. (W_{cni})
A1	1,00	1,00	4,00	6,00	0,444
A2	1,00	1,00	4,00	6,00	0,444
A3	0,25	0,25	1,00	1,50	0,111

$$W_{cni} = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}}$$

$$W_{cn_1} = \frac{6}{6 + 6 + 1,5} = 0,444$$

$$W_{cn_2} = \frac{6}{6 + 6 + 1,5} = 0,444$$

$$W_{cn_3} = \frac{1,5}{6 + 6 + 1,5} = 0,111$$

Análise de consistência da Matriz de comparação das alternativas no Critério C_3 – Expectativa

	A1	A2	A3
A1	1,00	1,00	4,00
A2	1,00	1,00	4,00
A3	0,25	0,25	1,00

$$\lambda_{max} = 3,0$$

$$CR = \frac{\lambda_{max} - n}{(n-1) * RI} = \frac{3,0 - 3}{(3-1) * 0,52} = 0,00$$

$$CR \leq 0,10$$

Avaliação global

	C1	C2	C3	Avaliação global	Ordem
Peso critério	0,250	0,250	0,500		
A1	0,691	0,729	0,444	0,58	1
A2	0,204	0,179	0,444	0,32	2
A3	0,105	0,092	0,111	0,10	3

$$AG_{A_i} = \sum_{j=1}^n W_{cn_j} * W_{An_{ij}}$$

$$AG_{A_1} = 0,25 * 0,691 + 0,25 * 0,729 + 0,5 * 0,444 = 0,58$$

$$AG_{A_2} = 0,25 * 0,204 + 0,25 * 0,179 + 0,5 * 0,444 = 0,32$$

$$AG_{A_3} = 0,25 * 0,105 + 0,25 * 0,092 + 0,5 * 0,111 = 0,10$$

Avaliação por dois ou mais decisores

- No AHP, a agregação é feita pela média geométrica:

$$\left(\prod_{k=1}^m a_{ij} \right)^{1/m} = \sqrt[m]{a_{ij_1} * a_{ij_2} * \dots * a_{ij_m}}$$

m: quantidade de decisores.

- Para 2 decisores:

$$\sqrt{a_{ij_1} * a_{ij_2}}$$

para $i, j = 1, \dots, n$

Avaliação com 3 níveis (critérios, sub-critérios e alternativas)

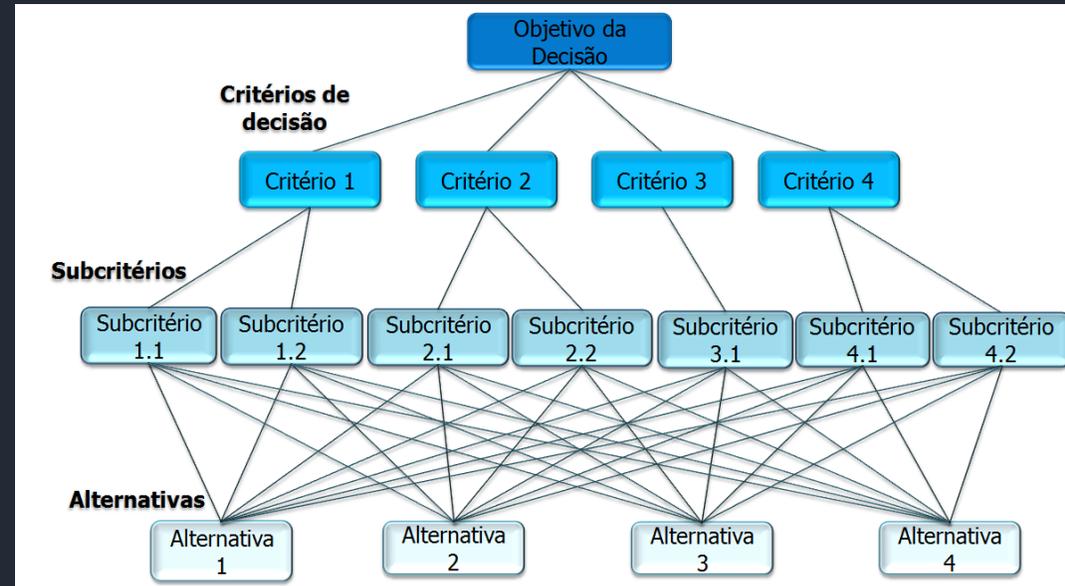
$$AG_{Ai} = \sum_{j=1}^n \sum_{k_j=1}^{l_j} Wc_{nj} * Wcn_{jk_j} * WAn_{ijk_j}$$

Onde:

J: no. De critérios;

Kj: número de sub-critérios do critério j;

i: no. De alternativas.



Referências

- SAATY, T. L. The Analytic Network Process. 1 ed. McGraw Hill: New York, 1980.
- Saaty, T. Decision making with the AHP. Int. J. Service Science, vol. 1, no 1, 2008.