SEL0310 - Ondas Eletromagnéticas

Anisotropia para nós, leigos.

Durante nossos estudos de ondas eletromagnéticas, por vezes, consideramos que o meio de propagação era isotrópico, significando que as ondas se propagavam da mesma maneira em todas as direções cartesianas. Na prática, materiais isotrópicos não alteram a direção de propagação ou a polarização das ondas que os atravessam, simplificando a modelagem dos sistemas eletromagnéticos que analisamos.

No entanto, alguns meios não são isotrópicos, afetando, portanto, a propagação das ondas eletromagnéticas de forma diferente conforme a direção considerada. Esses materiais são chamados de elementos anisotrópicos e são comumente encontrados em cristais e materiais estruturados, por exemplo.

Inclusive, novos materiais estruturados (ou melhor, produzidos artificialmente), como é o caso de metamateriais, ferrita e compósitos magneto-dielétricos, têm ganhado grande relevância nos projetos e implementação de dispositivos eletromagnéticos, devido a sua caracterização e seu comportamento, muitas vezes anisotrópico.

1 Definição tensorial

Um meio eletromagnético anisotrópico estabelece uma permissividade elétrica ϵ_r e uma permeabilidade magnética μ_r como tensores separados com diferentes valores nas três direções cartesianas (x, y, z), de forma que $\epsilon_x \neq \epsilon_y \neq \epsilon_z$ e $\mu_x \neq \mu_y \neq \mu_z$.

Para os fãs de álgebra linear, tensores nada mais são do que transformações lineares de um espaço vetorial, neste caso, de três dimensões E_3 dentro desse mesmo espaço. Se escolhermos uma base ortonormal $\vec{e_i}$, esta transformação será representada por uma matriz de elementos δ_{ij} (i, j = 1, 2, 3) e o sistema (1) descreve a relação matricial adequada.

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

ou

$$\vec{A} = \overline{\overline{\delta}} \cdot \vec{B} \tag{2}$$

Percebe-se, logo, que a definição da anisotropia difere da isotropia, onde tão simplesmente considerava-se $\epsilon_x = \epsilon_y = \epsilon_z$ e $\mu_x = \mu_y = \mu_z$, o que nos permitia utilizar as relações constitutivas:

$$\vec{B} = \mu\,\vec{H}$$
$$\vec{D} = \epsilon\,\vec{E} = \epsilon_0\,\vec{E} + \vec{P}$$

Nesse novo cenário, o tensor de susceptibilidade elétrica $\overline{\overline{\chi}}$, que relaciona a polarização do material dielétrico ao campo elétrico correspondente, é dado por:

$$\begin{bmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{bmatrix} = \epsilon_0 \begin{bmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{3}$$

ou

$$\vec{P} = \epsilon_0\,\overline{\overline{\chi}} \cdot \vec{E} \tag{4}$$

De forma que a permissividade elétrica ϵ na relação $\vec{D} = \epsilon\,\vec{E} = \epsilon_0\,\vec{E} + \vec{P}$ também será um tensor $\overline{\overline{\epsilon}} = \epsilon_0(\overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\chi}})$, seja $\overline{\overline{I}}$ a matriz identidade.

De maneira geral, o tensor dielétrico $\overline{\overline{\epsilon}}$ é uma matriz hermitiana, o que significa dizer que:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}^*$$

Assim, como em materiais anisotrópicos sem perdas, os elementos do tensor $\overline{\overline{\epsilon}}$ são reais, o tensor será simétrico tal que:

$$\overline{\overline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} & \epsilon_{23} & \epsilon_{33} \end{bmatrix}$$

2 Soluções em ondas planas em meios anistrópicos

Como as condições do nosso meio mudaram, todo o processo lógico que utilizamos até agora para determinar as equações de onda para os campos elétrico e magnético, bem como para determinar a relação de dispersão, não são mais válidos. Portanto, como sempre, devemos partir das ferramentas fundamentais que temos em mãos: as equações de Maxwell.

Considerando, por simplificação, um meio sem fontes de cargas ou correntes ($\rho = 0$ e $J = 0$), as equações de Maxwell assumem a forma:

$$\nabla \times \vec{E} = j\omega\mu_0\overline{\overline{\mu_r}}\,\vec{H}$$
$$\nabla \times \vec{H} = -j\omega\epsilon_0\overline{\overline{\epsilon_r}}\,\vec{E}$$

Se analisarmos o problema no sistema de coordenadas cartesiano principal, o modelo adotado torna-se mais simples, pois os tensores serão diagonais tais que definimos:

$$\overline{\overline{\epsilon_r}} = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix} \tag{5}$$

,

$$\overline{\overline{\mu_r}} = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \tag{6}$$

.

Aplicando as relações 5 e 6 nas leis de Ampère e Faraday anteriores, deve-se encontrar:

$$\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\hat{z} = -j\omega\mu_0(\mu_x H_x\hat{x} + \mu_y H_y\hat{y} + \mu_z H_z\hat{z})$$
$$\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z}\right)\hat{x} + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\hat{y} + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}\right)\hat{z} = j\omega\epsilon_0(\epsilon_x E_x\hat{x} + \epsilon_y E_y\hat{y} + \epsilon_z E_z\hat{z})$$

Se assumirmos uma solução do tipo $E(x,y,z) = E(x,y)\,e^{-jk_z z}$, considerando uma propagação em $+z$, devemos encontrar utilizando a primeira das equações acima, que:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - jk_z E_y = -j\omega\mu_0\mu_x H_x \tag{7}$$

$$jk_z E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -j\omega\mu_0\mu_y H_y \tag{8}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0\mu_z H_z \tag{9}$$

De forma análoga, se assumirmos uma solução do tipo $H(x,y,z) = H(x,y)\,e^{-jk_z z}$, devemos encontrar utilizando a segunda das equações mais acima, que:

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} - jk_z H_y = j\omega\epsilon_0\epsilon_x E_x \tag{10}$$

$$jk_z H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x} = j\omega\epsilon_0\epsilon_y E_y \tag{11}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = j\omega\epsilon_0\epsilon_z E_z \tag{12}$$

Considerando os modos TE e TM, conseguimos rearranjar as equações acima para deixá-las em função das componentes dos campos na direção de propagação z. Devemos encontrar no final que:

$$E_x = \frac{1}{j(k_0^2\mu_y\epsilon_x - k_z^2)}\left(\omega\mu_0\mu_y\frac{\partial H_z}{\partial y} + k_z\frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \tag{13}$$

$$E_y = -\frac{1}{j(k_0^2\mu_x\epsilon_y - k_z^2)}\left(\omega\mu_0\mu_x\frac{\partial H_z}{\partial x} - k_z\frac{\partial E_z}{\partial y}\right) \tag{14}$$

$$H_x = -\frac{1}{j(k_0^2\mu_x\epsilon_y - k_z^2)}\left(\omega\epsilon_0\epsilon_y\frac{\partial E_z}{\partial y} - k_z\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \tag{15}$$

$$H_y = \frac{1}{j(k_0^2\mu_y\epsilon_x - k_z^2)}\left(\omega\epsilon_0\epsilon_x\frac{\partial E_z}{\partial x} + k_z\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \tag{16}$$

onde $k_0^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0$.

A matemática é um pouco mais chata, mas o principal é conhecer a definição de anisotropia, como vista na Seção 1, e utilizar as equações de Maxwell para trabalhar os problemas. Inclusive, a partir da lei de Faraday e Ampère na forma tensorial, pode-se encontrar facilmente as equações do vetor propagação:

$$(\nabla \times \overline{\overline{\epsilon}}_r^{-1}) \cdot (\nabla \times \vec{H}) = k_0^2\,\overline{\overline{\mu_r}} \cdot \vec{H} \tag{17}$$

$$(\nabla \times \overline{\overline{\mu}}_r^{-1}) \cdot (\nabla \times \vec{E}) = k_0^2\,\overline{\overline{\epsilon_r}} \cdot \vec{E} \tag{18}$$

que serão úteis para encontrar as equações de dispersão e, então, avaliar fenômenos como a reflexão e transmissão. Mas, por ora, acho que vocês já têm uma boa base para compreender os pontos chaves! Bom quiz :)