

Aula 6: Extensões de funções contínuas

Universidade de São Paulo

São Carlos - SP, Brasil

1º Semestre de 2023 - Curso de Topologia

Definição 1

Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos. Seja $A \subset X$. Dadas $f : A \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y$ funções contínuas, dizemos que g é uma **extensão (contínua) de f** se $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$.

Proposição 2 (Critério de unicidade de extensão contínua)

Sejam (X, τ) e (Y, ρ) espaços topológicos, onde (Y, ρ) é de Hausdorff. Se $D \subset X$ é denso e $f : X \rightarrow Y$ e $g : X \rightarrow Y$ são duas funções contínuas tais que $f(d) = g(d)$ para todo $d \in D$, então $f = g$.

Demonstração. Suponha que não. Seja $x \in X$ tal $f(x) \neq g(x)$. Sejam A e B abertos disjuntos tais que $f(x) \in A$ e $g(x) \in B$. Note que $f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)$ é um aberto contendo x . Logo, existe $d \in f^{-1}(A) \cap g^{-1}(B)$. Note que $f(d) = g(d) \in A \cap B$, contradição.

Exemplo 3 (Função contínua num denso que não admite qualquer extensão contínua)

Considere $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ dada por

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ é par,} \\ 0 & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Note que f é contínua, $\mathbb{N}$ é denso em $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (espaço da sequência convergente) e não existe $g : \mathbb{N} \cup \{\infty\} \rightarrow [0, 1]$ contínua que estenda f .

Note que no mesmo exemplo, temos que f está definida num aberto e não pode ser estendida continuamente ao espaço todo.

Lema 4

Seja (X, τ) um espaço topológico. Suponha que exista $(F_s)_{s \in \mathbb{Q}}$ família de fechados satisfazendo:

1. $F_r \subset \text{Int}(F_s)$ se $r < s$;
2. $\bigcup_{s \in \mathbb{Q}} F_s = X$;
3. $\bigcap_{s \in \mathbb{Q}} F_s = \emptyset$.

Então a função $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = \inf \{r \in \mathbb{Q} : x \in F_r\}$ é uma função contínua.

Demonstração. Primeiramente, note que a função está bem definida pelas duas últimas condições.

Para ver que φ é contínua, note que, dados $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, temos

$$\varphi^{-1}((a, b)) = \bigcup_{(r,s) \in Q} (\text{Int}(F_s) \setminus F_r)$$

onde $Q = \{(r, s) : r, s \in \mathbb{Q} \text{ e } a < r < s < b\}$.

De fato, temos a igualdade acima pois:

► $\varphi^{-1}((a, b)) \subset \bigcup_{(r,s) \in Q} (\text{Int}(F_s) \setminus F_r)$

Seja x tal que $\varphi(x) \in (a, b)$. Sejam $r, s, t \in \mathbb{Q}$ tais que $a < r < \varphi(x) < t < s < b$. Como $\varphi(x) < t$, $x \in F_t$. Como $t < s$, $F_t \subset \text{Int}(F_s)$. Assim, $x \in \text{Int}(F_s)$. Como $\varphi(x) > r$, $x \notin F_r$.

► $\bigcup_{(r,s) \in Q} (\text{Int}(F_s) \setminus F_r) \subset \varphi^{-1}((a, b))$

Seja $x \in \text{Int}(F_s) \setminus F_r$ para algum $(r, s) \in Q$. Pela definição de φ , temos que $r < \varphi(x)$ e $\varphi(x) \leq s$. Como $a < r < s < b$, temos o resultado.

Com isso, temos que a imagem inversa de abertos básicos é aberto e, portanto, φ é contínua.