

Prática 1

Instrumentos de Medidas e Incertezas

Lino Misoguti

Laboratório de Física I

(1º Semestre 2023)

Experimentos

Medida do volume de dois objetos cilíndricos:

Medida indireta: Pelas dimensões físicas

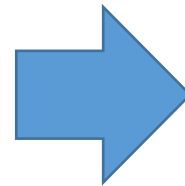
Medida direta: Pelo deslocamento de volume de um líquido

Medida indireta da densidade desses dois objetos cilíndricos:

Densidade=Massa/Volume

Medida direta com dispersão:

Medida da espessura de um fio de cobre irregular



Conceitos Fundamentais

Erros ou incertezas em medidas experimentais:

Erros (precisão) de instrumentos

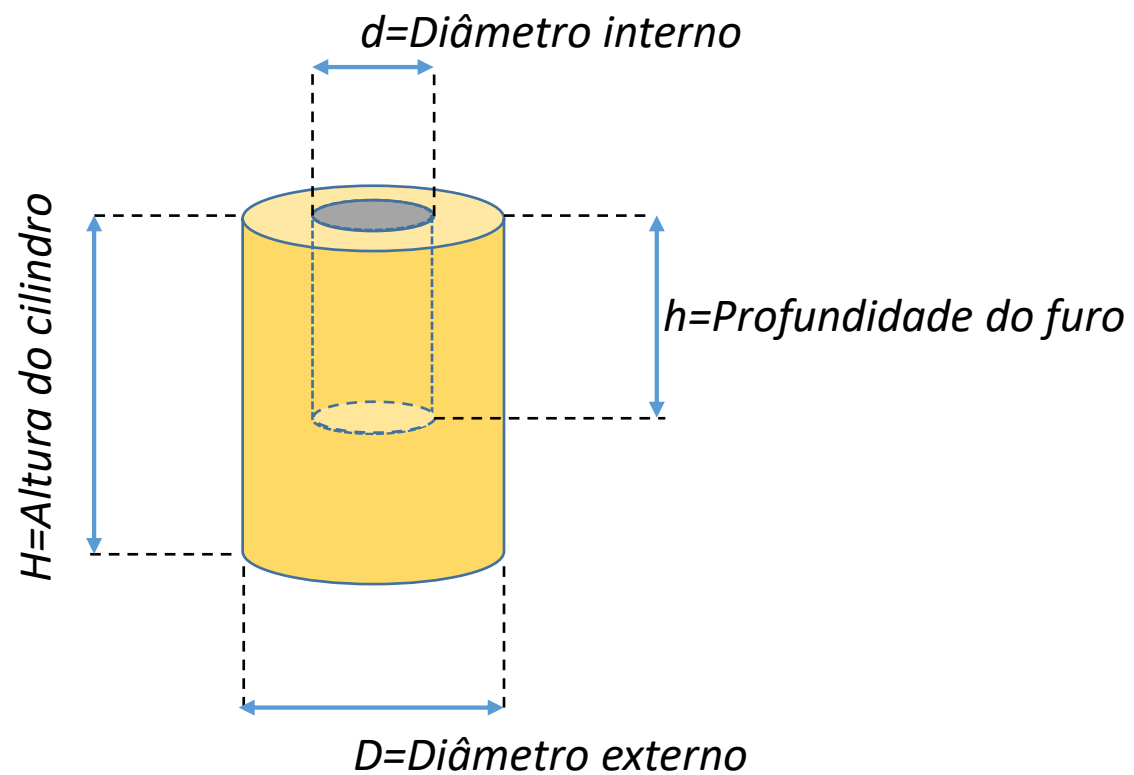
Propagação de erros em medidas indiretas

Algarismo significativo: arredondamento de valores

Dispersão de valores: Estatística de dados

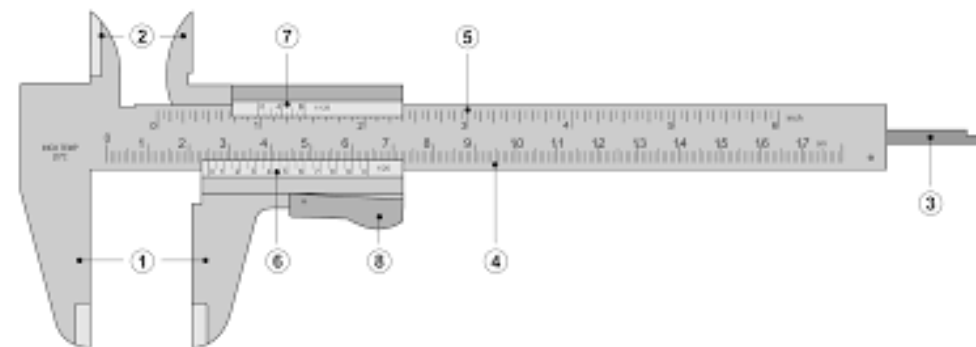
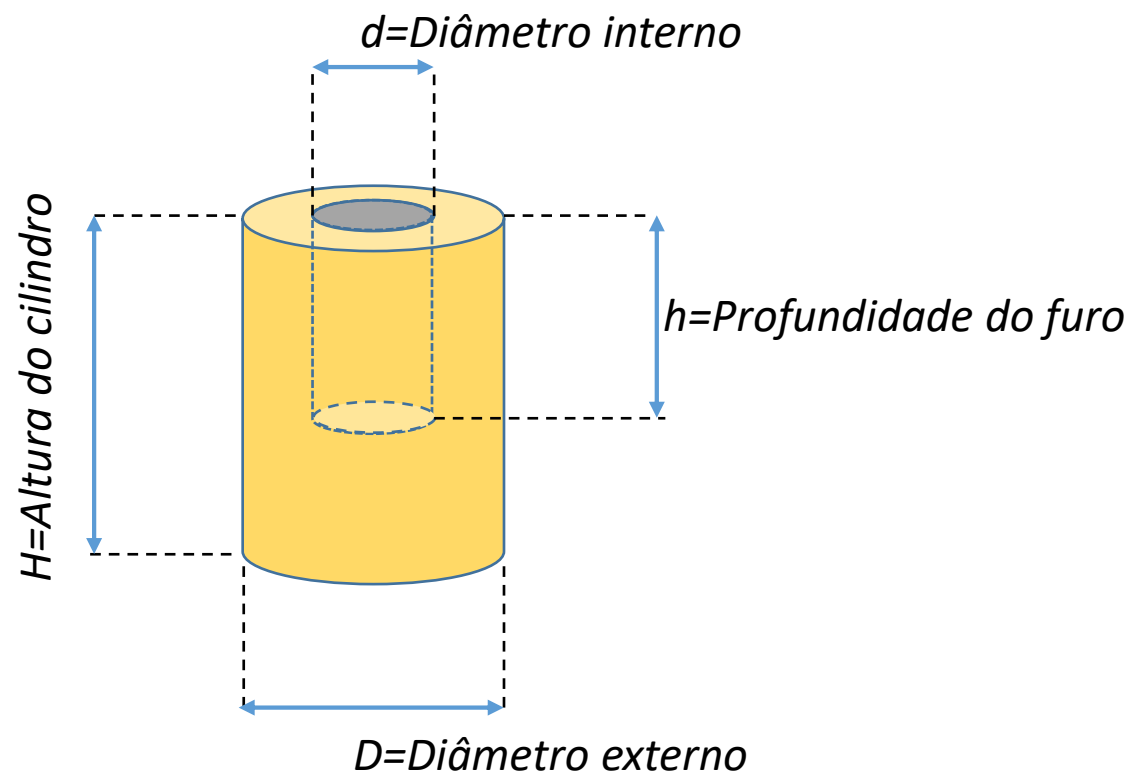
Medida de volume de dois objetos cilíndricos

Medida indireta:



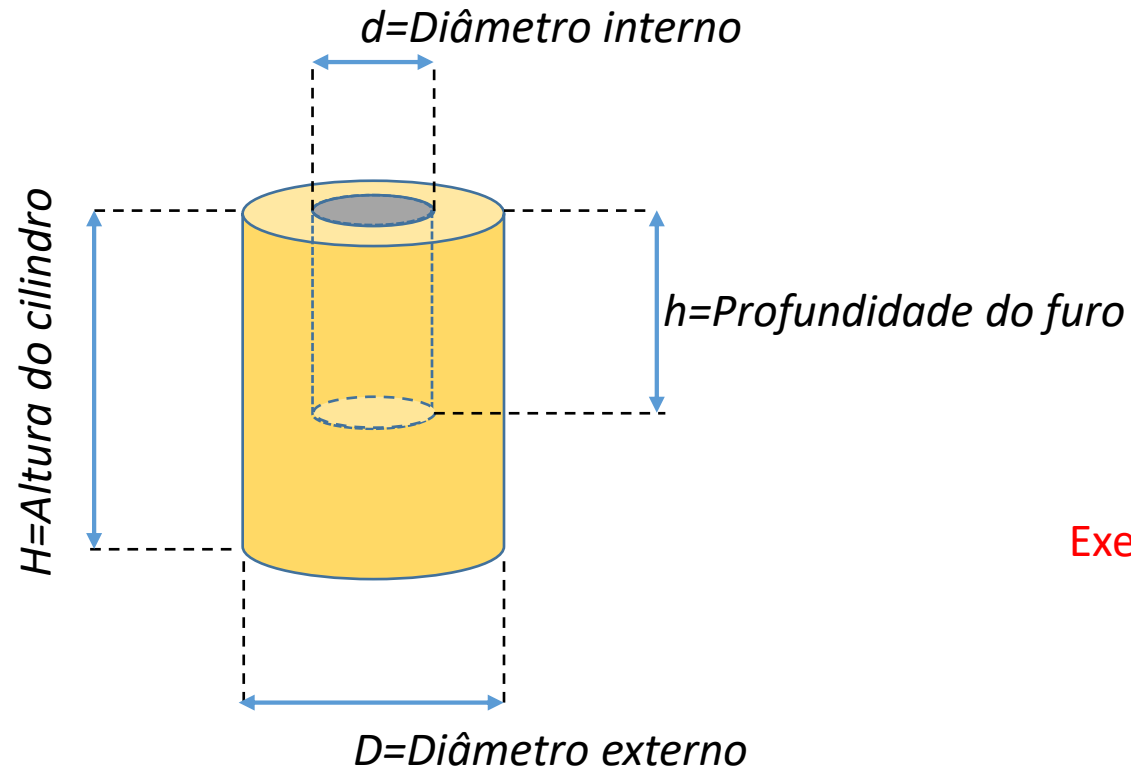
Medida de volume de dois objetos cilíndricos

Medida indireta: Cálculo a partir das dimensões usando um paquímetro



Medida de volume de dois objetos cilíndricos

Medida indireta: Cálculo a partir das dimensões usando um paquímetro



$$V_{cilindro} = (\text{Área da base}) \times (\text{Altura})$$

$$\text{Volume} = V = (V_{\text{cilindro sem furo}}) - (V_{\text{furo cilíndrico}})$$

$$V = \pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 H - \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 h$$

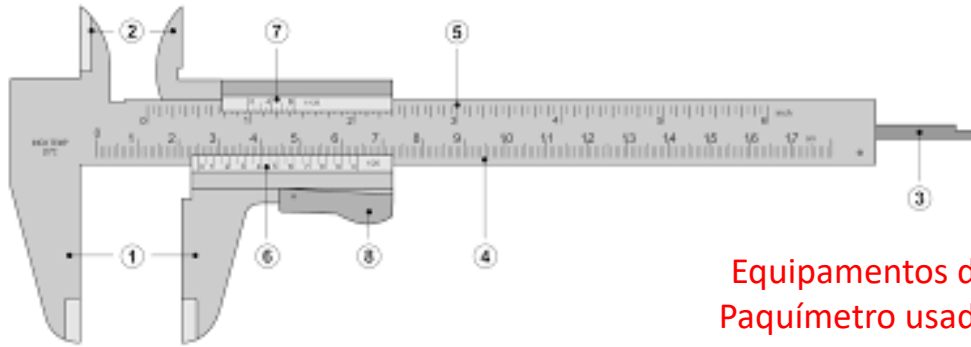
$$V = \frac{\pi}{4} [D^2 H - d^2 h]$$

Exemplo: Considere que $D=2$ cm, $d=1,1$ cm, $H=3$ cm e $h=1,5$ cm

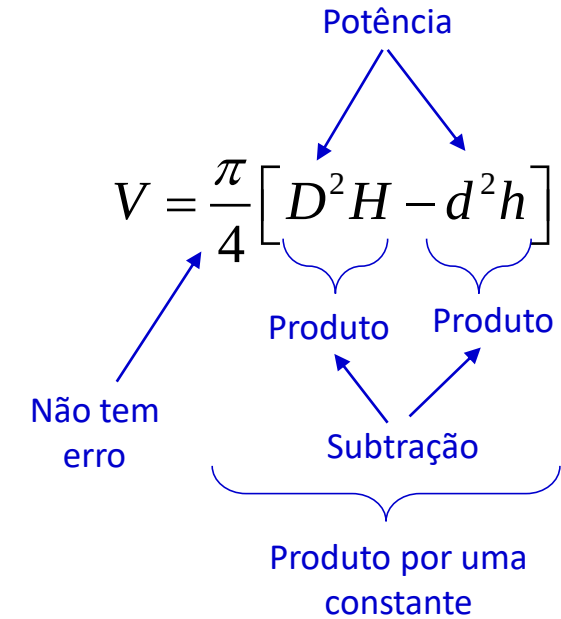
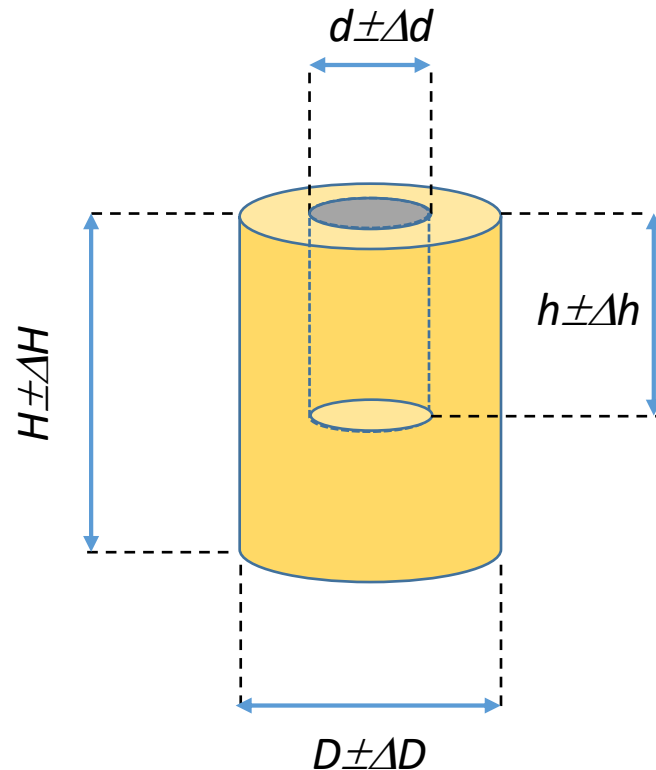
$$V = \frac{\pi}{4} [2^2 * 3 - 1,1^2 * 1,5] = (7,99928...) \text{ cm}^3$$

Medida de volume de dois objetos cilíndricos

Medida indireta: Cálculo a partir das dimensões com incerteza



Equipamentos de medida tem imprecisões intrínsecas:
Paquímetro usado no experimento: 0,05 mm=0,005 cm!



Cálculo de erros

Potência $z = x^n \Rightarrow \Delta z = nx^{n-1} \Delta x$

Produto $z = x * y \Rightarrow \Delta z = x * \Delta y + y * \Delta x$

Subtração $z = x - y \Rightarrow \Delta z = \Delta x + \Delta y$

Produto por uma constante $z = ax \Rightarrow \Delta z = a \Delta x$

Medida de volume de dois objetos cilíndricos

Medida indireta: Cálculo a partir das dimensões com incerteza

$$V = \frac{\pi}{4} [D^2 H - d^2 h] \quad \longrightarrow \quad (V \pm \Delta V) = \frac{\pi}{4} [(D^2 \pm \Delta D^2)(H \pm \Delta H) - (d^2 \pm \Delta d^2)(h \pm \Delta h)]$$

Considere que $D=(2,000 \pm 0,005)$ cm, $d=(1,100 \pm 0,005)$ cm, $H=(3,000 \pm 0,005)$ cm e $h=(1,500 \pm 0,005)$ cm

$$(V \pm \Delta V) = \frac{\pi}{4} [(2^2 \pm \Delta D^2)(3 \pm 0,005) - (1,1^2 \pm \Delta d^2)(1,5 \pm 0,005)]$$

Potência : $z = x^n \Rightarrow \Delta z = nx^{n-1} \Delta x \quad \longrightarrow \quad n=2$

$$z = x^2 = 2^2 = 4$$

$$\Delta z = 2 * 2^{2-1} * 0,005 = 0,02$$

$$D^2 = (4,00 \pm 0,02)$$

$$z = x^2 = 1,1^2 = 1,21$$

$$\Delta z = 2 * 1,1^{2-1} * 0,005 = 0,011$$

$$d^2 = (1,21 \pm 0,011)$$

$$(V \pm \Delta V) = \frac{\pi}{4} [(4,00 \pm 0,02)(3,000 \pm 0,005) - (1,21 \pm 0,011)(1,500 \pm 0,005)]$$

Medida de volume de dois objetos cilíndricos

Medida indireta: Cálculo a partir das dimensões com incerteza

$$(V \pm \Delta V) = \frac{\pi}{4} \left[\underbrace{(4,00 \pm 0,02)(3,000 \pm 0,005)}_{\text{Produto}} - \underbrace{(1,21 \pm 0,011)(1,500 \pm 0,005)}_{\text{Produto}} \right]$$

$$\text{Produto : } z = x * y \Rightarrow \Delta z = x * \Delta y + y * \Delta x$$

$$z = x * y = 4 * 3 = 12$$

$$z = x * y = 1,21 * 1,5 = 1,815$$

$$\Delta z = 4 * 0,005 + 3 * 0,02 = 0,08$$

$$\Delta z = 1,21 * 0,005 + 1,5 * 0,011 = 0,02255$$

$$(V \pm \Delta V) = \frac{\pi}{4} \left[(12,00 \pm 0,08) - (1,815 \pm 0,02255) \right]$$

Medida de volume de dois objetos cilíndricos

Medida indireta: Cálculo a partir das dimensões com incerteza

$$(V \pm \Delta V) = \frac{\pi}{4} \left[(12,00 \pm 0,08) - (1,815 \pm 0,02255) \right]$$

Subtração: $z = x - y \Rightarrow \Delta z = \Delta x + \Delta y$

$$z = x - y = 12 - 1,815 = 10,185$$

$$\Delta z = 0,08 + 0,02255 = 0,10255$$

$$(V \pm \Delta V) = \frac{\pi}{4} \left[(10,185 \pm 0,10255) \right] = (0,785398...) \left[(10,185 \pm 0,1026) \right]$$

Produto por uma constante: $z = ax \Rightarrow \Delta z = a\Delta x$

$$z = ax = 0,785398... * 10,185 = 7,99928...$$

$$\Delta z = 0,785398... * 0,1026 = 0,08058...$$

$$(V \pm \Delta V) = (7,99928... \pm 0,08058...) = (8,00 \pm 0,08)$$

Medida de volume de dois objetos cilíndricos

Medida indireta: Cálculo sem incerteza

$$V = \frac{\pi}{4} [2^2 * 3 - 1,1^2 * 1,5] = (7,99928...) cm^3$$

Medida indireta: Cálculo a partir das dimensões com incerteza

$$(V \pm \Delta V) = (8,00 \pm 0,08) cm^3$$

$$V_{Máximo} = 8,08 cm^3$$

$$V_{Mínimo} = 7,92 cm^3$$

Medidas experimentais sempre possuem incertezas!

Conceitos físicos importantes que foram usados

Unidades de medidas: mm, cm, m (SI=sistema internacional)

Precisão do paquímetro: $0,05 \text{ mm} = 0,005 \text{ cm} = 0,05 \times 10^{-3} \text{ m} = 5 \times 10^{-5} \text{ m}$

Prestar sempre atenção às unidades! (não misturar)

Obs: A magnitude e a unidade de medida devem estar separadas por um espaço

Arredondamento de valores (truncar), algarismo significativos:

$$(V \pm \Delta V) = \frac{\pi}{4} [(10,185 \pm 0,10255)]$$

Algarismo significativo é determinado pelo valor do erro

Obs: Nas contas intermediária não é preciso fazer o arredondamento e também pode-se omitir as unidades para não sobrecarregar as contas

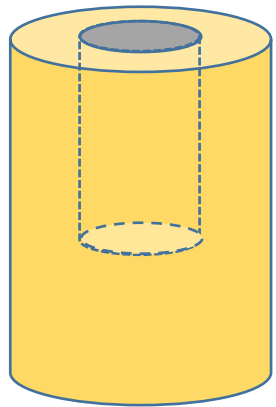
$$(V \pm \Delta V) = (7,9992786... \pm 0,08058...) = (8,00 \pm 0,08) \text{ cm}^3$$

Menor que 5, mantém
Maior ou igual a 5, aumenta

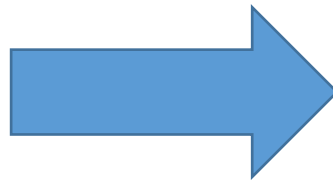
Obs: Faça o arredondamento apenas no último valor que será mostrado. Não esquecer de colocar a unidade correta, de preferência em SI

Medida de volume de dois objetos cilíndricos

Medida direta: Cálculo a partir do deslocamento de um fluido



Mergulhar totalmente dentro de um líquido



Volume deslocado
igual ao volume do
objeto

Precisão de uma proveta
graduada:
Menor divisão da escala ou, caso
possível, metade da menor divisão

(Menor divisão, 1 ml= 1 cm³)

Medida indireta da densidade de dois objetos cilíndricos

Próximo passo, medir a densidade dos dois objetos cilíndricos

$$\text{densidade} = \rho = \frac{m}{V}$$

Medir usando uma balança eletrônica

$$(\rho \pm \Delta\rho) = \frac{(m \pm \Delta m)}{(V \pm \Delta V)}$$

Valores obtidos no experimento anterior

Erro:

$$\text{Divisão: } z = \frac{x}{y} \Rightarrow \Delta z = \frac{x\Delta y + y\Delta x}{y^2}$$



Obs: Precisão da balança utilizada no laboratório:
Até 500 g = 0,01 g
Mais que 500 g = 0,1 g

Medida indireta da densidade de dois objetos cilíndricos

Exemplo: Considere que $V=(8,00\pm0,08) \text{ cm}^3$, $m=(25,52 \pm 0,01) \text{ g}$

$$(\rho \pm \Delta\rho) = \frac{(m \pm \Delta m)}{(V \pm \Delta V)} = \frac{(25,52 \pm 0,01) \text{ g}}{(8,00 \pm 0,08) \text{ cm}^3}$$

$$\text{Divisão: } z = \frac{x}{y} \Rightarrow \Delta z = \frac{x\Delta y + y\Delta x}{y^2}$$

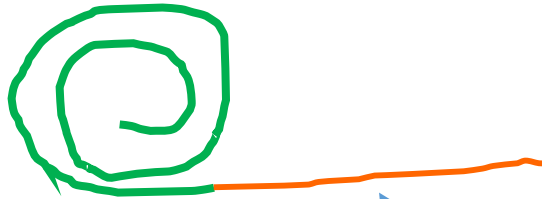
$$(\rho \pm \Delta\rho) = \left(3,19 \pm \left(\frac{25,52 * 0,08 + 8 * 0,01}{8^2} \right) \right) \text{ g/cm}^3$$

$$(\rho \pm \Delta\rho) = (3,19 \pm 0,03315) = (3,19 \pm 0,03) \text{ g/cm}^3$$

No *handbook*, procurar o metal cujo valor da densidade é mais próximo do valor obtido experimentalmente
(Obs: No *handbook* aparece $c.c.=cm^3$)

Medida direta com dispersão

Medida da espessura d de um fio de cobre irregular



Como o fio é irregular, há uma dispersão dos valores da espessura.

Neste caso deve-se usar a estatística para quantificar o melhor valor (valor médio) e o respectivo erro (desvio absoluto, por exemplo).



Uso do micrômetro no lugar do paquímetro.

Maior precisão

Precisão do micrômetro utilizado: 0,01 mm

$$d_{\text{médio}} = \bar{d} = \frac{d_1 + d_2 + d_3 + \dots + d_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^N d_i}{N}$$

N =número de medidas

$$\text{Desvio Absoluto} = \Delta d = \frac{\sum_{i=1}^N |d_i - \bar{d}|}{N}$$

$$d = (\bar{d} \pm \Delta d)$$

Medida direta com dispersão

Medida da espessura d de um fio de cobre irregular

Exemplo: Suponha que foram feitas 3 medidas de espessuras ($N=3$):

$$d_1 = (2,01 \pm 0,01) \text{ mm}$$

$$d_2 = (2,05 \pm 0,01) \text{ mm}$$

$$d_3 = (2,07 \pm 0,01) \text{ mm}$$

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^N d_i}{N} = \frac{2,01 + 2,05 + 2,07}{3} = \frac{6,13}{3} = 2,043333...$$

$$\Delta d = \frac{\sum_{i=1}^N |d_i - \bar{d}|}{N} = \frac{|2,01 - 2,04333...| + |2,05 - 2,04333...| + |2,07 - 2,04333...|}{3}$$

$$\Delta d = \frac{|-0,0333...| + |0,00666...| + |0,0266...|}{3} = \frac{0,0333 + 0,00667 + 0,02667}{3} = \frac{0,0666...}{3} = 0,0222...$$

$$d = (\bar{d} \pm \Delta d) = (2,04 \pm 0,02)$$

Conceitos importantes

Precisão do micrômetro utilizado: 0,01 mm

Medida estatística

$$d = (\bar{d} \pm \Delta d) = (2,04 \pm 0,02)$$

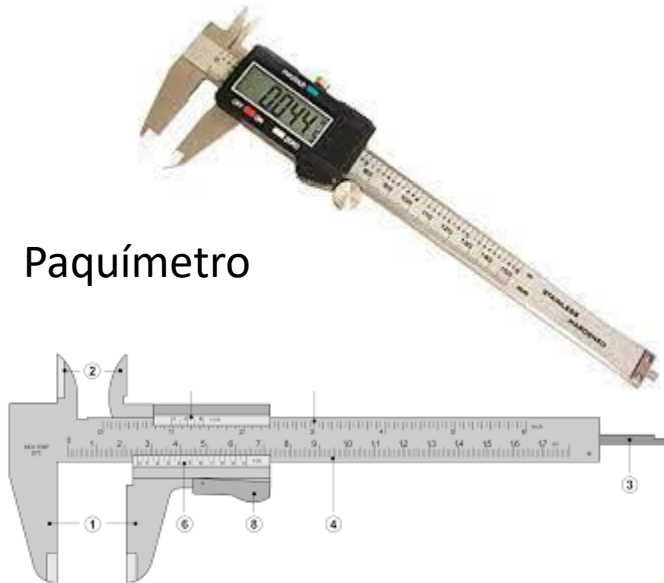
Obs: Caso o valor do erro estatístico seja menor que a precisão do instrumento, o erro a ser considerada é sempre o maior, ou seja, a precisão do instrumento prevalece

Existem diferentes instrumentos de medidas para a medida da mesma grandeza, por exemplo, dimensão:

A escolha do instrumento depende de uma série de fatores:

Dimensões e forma dos objetos. Da disponibilidade, do custo, da precisão, etc.

Paquímetro



Micrômetro



Réguas



Trenas



Sumário

Propomos a medida do volume de dois objetos cilíndricos levando em conta as incertezas por:

Medida indireta: Pelas medidas das dimensões físicas usando um paquímetro

Medida direta: Pelo deslocamento de volume de um líquido dentro de uma proveta

Tendo determinado o volume, e a massa, determinamos a densidade desses dois objetos cilíndricos:

Densidade=Massa/Volume

Estudo da dispersão de medidas, estatística de dados:

Várias medida da espessura de um fio de cobre irregular

Dicas de Cálculo de incerteza (Valor max e min)

$$V = \frac{\pi}{4} [D^2 H - d^2 h] \quad \longrightarrow \quad (V \pm \Delta V) = \frac{\pi}{4} [(D^2 \pm \Delta D^2)(H \pm \Delta H) - (d^2 \pm \Delta d^2)(h \pm \Delta h)]$$

Considere que $D=(2,000 \pm 0,005)$ cm, $d=(1,100 \pm 0,005)$ cm, $H=(3,000 \pm 0,005)$ cm e $h=(1,500 \pm 0,005)$ cm

$$V = \frac{\pi}{4} [2^2 * 3 - 1,1^2 * 1,5] = 0,785 * [12 - 1,815] = 0,785 * 10,185 = 7,995$$

$$V_{\max imo} = \frac{\pi}{4} [2,005^2 * 3,005 - 1,095^2 * 1,495] = 0,785 * [12,08 - 1,7925] = 0,785 * 10,2875 = 8,0757$$

$$V_{\min imo} = \frac{\pi}{4} [1,995^2 * 2,995 - 1,105^2 * 1,505] = 0,785 * [11,92 - 1,8376] = 0,785 * 10,0824 = 7,9147$$

$$\Delta V = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{2} = \frac{8,0757 - 7,9147}{2} = \frac{0,161}{2} = 0,0805 = 0,08$$

$$\boxed{V = 7,995 \pm 0,08 = 8,00 \pm 0,08 \text{ cm}^3}$$

Derivação direta de erros de qualquer função $f(x,y,z,...)$

$$f(D, H, d, h) = V = \frac{\pi}{4} [D^2 H - d^2 h]$$

← Cálculo diferencial

$$\Delta z = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \Delta y + \dots$$

$$\Delta V = \frac{\pi}{4} \left[\left| \frac{\partial (D^2 H - d^2 h)}{\partial D} \right| \Delta D + \left| \frac{\partial (D^2 H - d^2 h)}{\partial H} \right| \Delta H + \left| \frac{\partial (D^2 H - d^2 h)}{\partial d} \right| \Delta d + \left| \frac{\partial (D^2 H - d^2 h)}{\partial h} \right| \Delta h \right]$$

$$\Delta V = \frac{\pi}{4} [2D^{2-1}H \Delta D + D^2 \Delta H + |-2d^{2-1}h| \Delta d + |-d^2| \Delta h] \Rightarrow \Delta V = \frac{\pi}{4} [2DH \Delta D + D^2 \Delta H + 2dh \Delta d + d^2 \Delta h]$$

Ex: Considere que $D=(2,000 \pm 0,005)$ cm, $d=(1,100 \pm 0,005)$ cm, $H=(3,000 \pm 0,005)$ cm e $h=(1,500 \pm 0,005)$ cm

$$\Delta V = \frac{\pi}{4} [2(2)(3)0,005 + 2^2 0,005 + 2(1,1)(1,5)0,005 + 1,1^2 0,005] \Rightarrow \Delta V = \frac{\pi}{4} [0,06 + 0,02 + 0,0165 + 0,00605]$$

$$\Delta V = \frac{\pi}{4} [0,10255] \Rightarrow \Delta V = 0,08054... \Rightarrow \Delta V = 0,08$$