

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES POR ELIMINAÇÃO GAUSSIANA

→ ESCALONAMENTO + SUBSTITUIÇÃO REVERSA

com:

- * aritmética de ponto flutuante (APF)

- * condensação pivotal

(em geral, ajuda a diminuir erros de arredondamento)

EXEMPLO c/ DISCUSSÃO:

$$\begin{cases} 1,2x + 2,1y - z = 1 \\ 1,7x + y - 0,5z = -1 \\ -3,3x - 2,5y + z = 1,5 \end{cases}$$

incógnitas:

x, y, z

3x3

(2 algarismos significativos)

↳ Se coeficientes tiverem mais algarismos, arredondar antes de começar

Notação matricial:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1.2 & 2.1 & -1.0 & 1.0 \\ 1.7 & 1.0 & -0.50 & -1.0 \\ -3.3 & -2.5 & 1.0 & 1.5 \end{array} \right)$$

Estratégia (parte dela): fazer operações no sistema que não alterem o conjunto-solução.

→ troca de linhas

→ somar (ou subtrair) um múltiplo de uma linha em outra.

Pivô: elemento que vai ficar
na diagonal

Começando pela coluna 1: elemento "1,1"
linha $\nearrow$ coluna $\uparrow$

Condensação pivotal: escolher como pivô
o elemento de maior valor absoluto (módulo)
da diagonal p/ baixo (na coluna)

$\hookrightarrow$ fazer troca de linhas necessária.

No exemplo: $L_1 \leftrightarrow L_3$ (troca das linhas L_1
e L_3)

Pivô 1

$$\begin{pmatrix} -3,3 & -2,5 & 1,0 & | & 1,5 \\ 1,7 & 1,0 & -0,50 & | & -1,0 \\ 1,2 & 2,1 & -1,0 & | & 1,0 \end{pmatrix}$$

Agora: Vamos usar o Pivô 1
p/ zerar abaixo dele.

$$L_2 \rightsquigarrow L_2 - m_{21} L_1$$

$$L_3 \rightsquigarrow L_3 - m_{31} L_1$$

índices
das
posições
zeradas

$$\underline{m_{21} = ?}$$

$$1,7 - m_{21} \cdot (-3,3) = 0$$

e o que
queremos.

$$\Rightarrow \boxed{m_{21} = \frac{1,7}{-3,3}}$$

elemento na
posição a ser
zerado

pivô.

Calculadora:

$$1,7 \div \underset{\substack{\uparrow \\ (-)}}{-3,3} = -0,5151... \rightarrow \boxed{\underline{-0,52 = m_{21}}}$$

$$m_{31} = \frac{1,2}{-3,3} = -0,36$$

$$L_2 - \underset{\substack{\uparrow \\ m_{21}}}{(-0,52)} L_1 : (\text{contas})$$

1,0	-0,50	-1,0
↓	↓	↘
$1,0 - (-0,52)(-2,5)$		$-1,0 - (-0,52)(1,5)$
-0,30	$-0,50 - (-0,52)1,0$	-0,22
	0,020	

$$L_3 - (-0,36) L_1 : \quad \begin{aligned} 2,1 - (-0,36)(-2,5) &= 1,2 \\ -1,0 - (-0,36)(1,0) &= -0,64 \\ 1,0 - (-0,36)(1,5) &= 1,5 \end{aligned}$$

O sistema fica:

$$\begin{pmatrix} -3.3 & -2.5 & 1.0 & | & 1.5 \\ 0 & -0.30 & 0.020 & | & -0.22 \\ 0 & 1.2 & -0.64 & | & 1.5 \end{pmatrix}$$

Acabou a coluna 1. Vamos para a col. 2.

Pivô 2: na posição "22"

Da diagonal p/ baixo: 1.2 é o maior em módulo.

$L_2 \leftrightarrow L_3$

$$\begin{pmatrix} -3.3 & -2.5 & 1.0 & | & 1.5 \\ 0 & 1.2 & -0.64 & | & 1.5 \\ 0 & -0.30 & 0.020 & | & -0.22 \end{pmatrix}$$

→ Pivô 2

$$L_3 \rightsquigarrow L_3 - m_{32} L_2$$

$$m_{32} = \frac{-0,30}{1,2} = -0,25$$

$$0,020 - (-0,25) \times (-0,64) = -0,14$$

$$-0,22 - (-0,25) \times (1,5) = 0,16$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3,3 & -2,5 & 1,0 & 1,5 \\ 0 & 1,2 & -0,64 & 1,5 \\ 0 & 0 & -0,14 & 0,16 \end{array} \right)$$

forma "triangular superior"

Reescrevendo como sistema:

$$\begin{cases} -3,3x - 2,5y + z = 1,5 \\ 1,2y - 0,64z = 1,5 \\ -0,14z = 0,16 \end{cases}$$

Substituição reversa:

3ª eq: $z = \frac{0,16}{-0,14} = -1,1$

$z = -1,1$

2ª eq: $y = \frac{1,5 + 0,64(-1,1)}{1,2} = 0,66$

$y = 0,66$

1ª eq: $x = \frac{(1,5 - (-1,1) + 2,5 \times 0,66)}{-3,3} = -1,3$

$x = -1,3$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.3 \\ 0.66 \\ -1.1 \end{pmatrix}$$

Soluções
(aproximada, por
causa dos
arredondamentos)

Conferindo:

$$\boxed{0.926}$$

$$\underline{1} - \left[1.2 \cdot (-1.3) + 2.1 \cdot (0.66) - 1.0 \cdot (-1.1) \right] = 0.074$$

$$\boxed{-1.0}$$

$$-1 - \left[1.7 \cdot (-1.3) + 1.0 \cdot (0.66) - 0.5 \cdot (-1.1) \right] = 0$$

$$\boxed{1.54}$$

$$1.5 - \left[-3.3 \cdot (-1.3) - 2.5 \cdot (0.66) + 1.0 \cdot (-1.1) \right] = -0.04$$

↑
"lado direito"

↑
"lado esquerdo"

$$\text{resíduo} = \begin{pmatrix} 0.074 \\ 0 \\ -0.04 \end{pmatrix}$$

$$\text{relativo:} \begin{pmatrix} 7.4\% \\ 0\% \\ 2.7\% \end{pmatrix}$$

(em
módulo)

EXERCÍCIO:

Ref faça as contas usando 3 (ou 4...
algarismos e veja se o resíduo diminui.

↙
pode-se olhar o
maior valor

(ou o maior relativo)
entre as linhas.