

Lista 7 - MAT-206 - MAP-216 - 2023

Definição: Seja K um corpo ordenado, $A \subseteq K$, $A \neq \emptyset$, e $s, l \in K$.

(I) Dizemos que s é supremo de A se s é o menor dos limitantes superiores de A , isto é:

(S1) $\forall x \in A (x \leq s)$ (s é limitante superior de A).

(S2) $\forall t \in K$ (se $x \leq t, \forall x \in A$ então $s \leq t$). (s é o menor dos limitantes superiores de A).

(II) Um elemento $l \in K$ é dito ínfimo de A se é o maior dos limitantes inferiores de A , isto é:

(I1) $\forall x \in A (l \leq x)$ (l é limitante inferior de A).

(I2) $\forall t \in K$ (se $t \leq x, \forall x \in A$ então $t \leq l$). (l é o maior dos limitantes inferiores de A).

(I) Seja K um corpo ordenado, $A \subseteq K$, $A \neq \emptyset$, e $s \in K$. Prove que são equivalentes:

(S1) $\forall x \in A (x \leq s)$

S2') $\forall t \in K (t < s \rightarrow \exists x \in A : t < x)$

(II) Seja K um corpo ordenado, $A \subseteq K$, $A \neq \emptyset$, e $l \in K$. Prove que são equivalentes:

(I1) $\forall x \in A (l \leq x)$

I2') $\forall t \in K (l < t \rightarrow \exists x \in A : x < t)$

Em \mathbb{R} , vale o **Axioma da Completude**:

Todo subconjunto de \mathbb{R} não vazio e limitado superiormente possui supremo.

(III) Dados dois conjuntos A e B não vazios, definimos

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Sejam A e B dois conjuntos não vazios e limitados superiormente.

Prove que $A + B$ é limitado superiormente e que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Vale o análogo para o ínfimo.

(IV) Seja $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio e limitado e $k \in \mathbb{R}$.

Definimos $kA = \{kx : x \in A\}$.

(i) Se $k > 0$ então $\sup(kA) = k(\sup A)$ e $\inf(kA) = k(\inf A)$.

(ii) Se $k < 0$ então $\sup(kA) = k(\inf A)$ e $\inf(kA) = k(\sup A)$.

(V) Prove que todo corpo ordenado completo é arquimediano.

(VI) Prove que todo número real positivo possui raiz n -ésima:

dado $x > 0$ existe $z > 0$ tal que $z^n = x$.

(VII) Em cada um dos subconjuntos de \mathbb{R} , estude a existência de supremo, ínfimo, máximo e mínimo:

(a) $A = \{1, 3\}$

(b) $A = \{\pi, 3\}$

(c) $A = [0, 4]$

(d) $A =]0, 4[$

(e) $A = \left\{\frac{1}{n} : n \geq 1\right\}$

(f) $A = \left\{1 - \frac{1}{n} : n \geq 1\right\}$

(g) $A = \left\{\frac{n}{n+1} : n \geq 1\right\}$

(h) $A = \left\{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) : n \geq 1\right\}$

(i) $A = \left\{n + \frac{(-1)^n}{n} : n \geq 1\right\}$

(j) $A =]-\infty, 4[$

(k) $A = \bigcap_{n \geq 1} \left[\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}\right]$

(l) $A = \{r \in \mathbb{Q} : r < 5\}$

(m) $A = \{r \in \mathbb{Q} : r^2 < 5\}$