Equação Diferencial da Quantidade de Movimento

Equação de Navier-Stokes

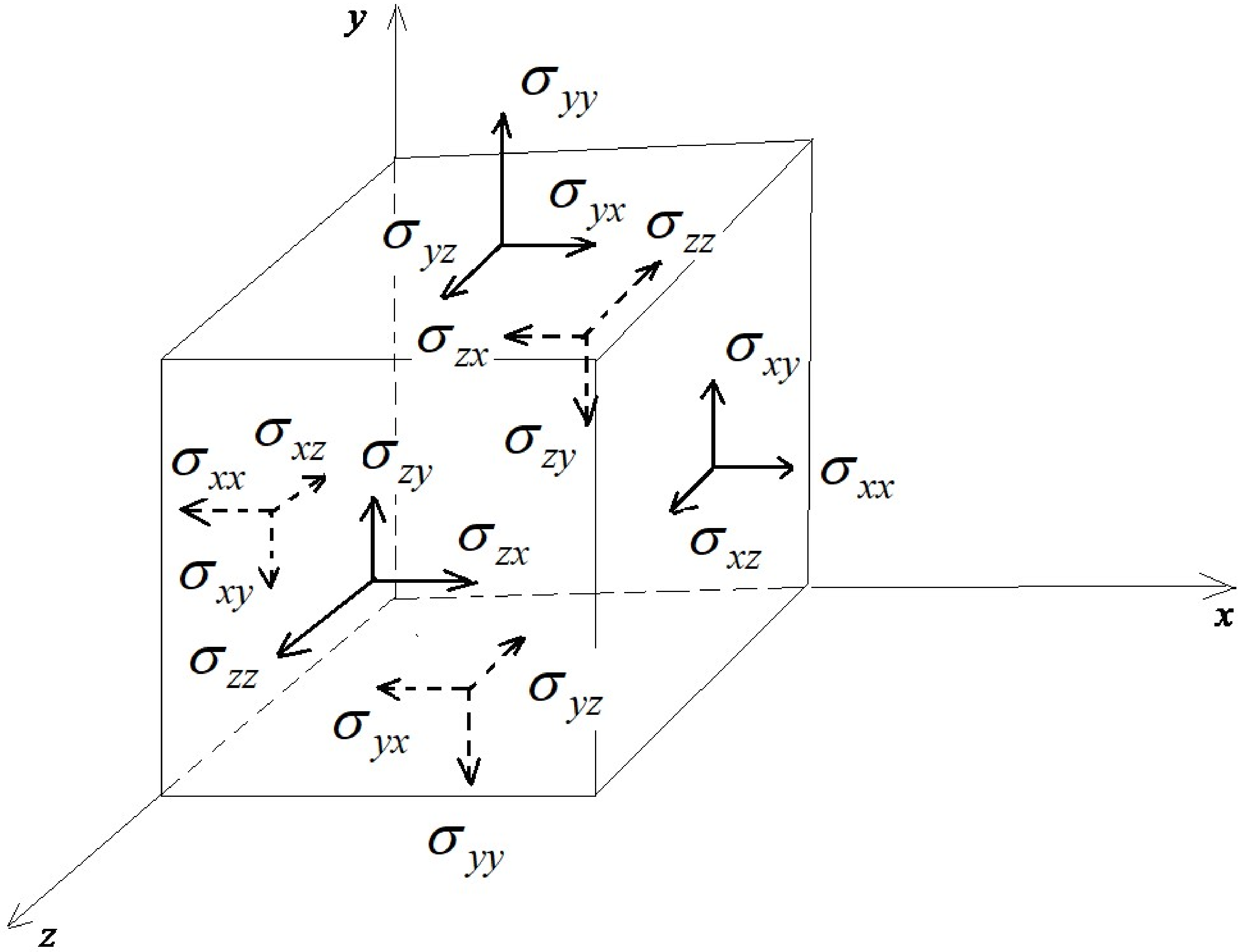
1) Tensor das tensões de Cauchy

A tensão é uma medida das forças internas entre as partículas que constituem um corpo, pois elas resistem à compressão, tração ou cisalhamento quando sob a influência de forças externas aplicadas. O estado de tensão em um ponto de um corpo material é dado pelo tensor de tensão de Cauchy. Se um ponto for tratado como um cubo infinitamente pequeno, a tensão em cada face pode ser separada em três vetores diferentes, um normal e dois tangenciais à face. Como um cubo é formado por três pares de faces e as faces paralelas são idênticas em um cubo infinitamente pequeno, existem nove vetores de tensão independentes.

Na forma matricial, o tensor das tensões de Cauchy é dado por:

$$\vec{\vec{\sigma}} = \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

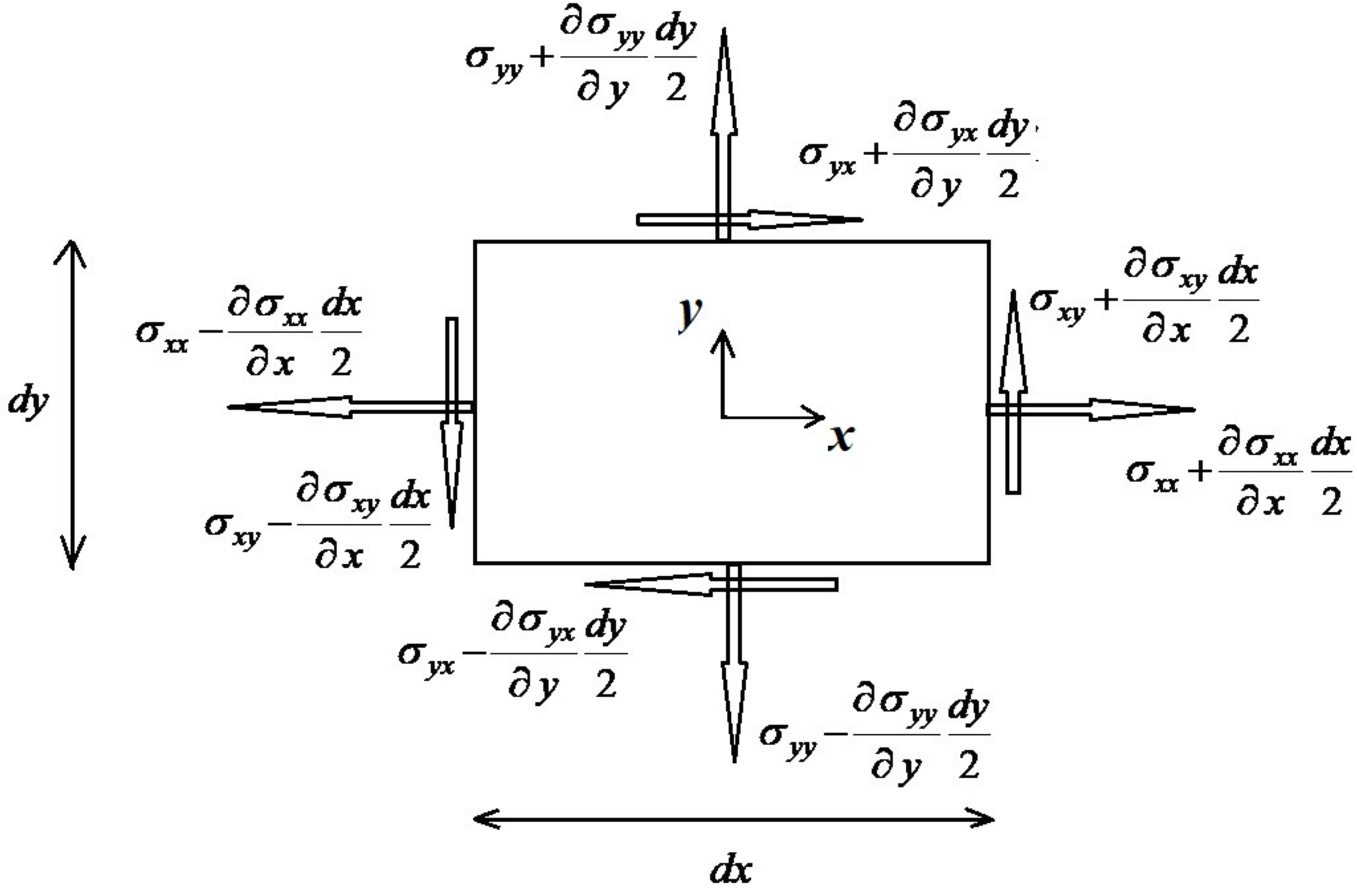
Tomando um sistema de referência, se o vetor normal unitário em uma face aponta na direção positiva do sistema de referência, as tensões positivas também apontam na direção positiva. Se o vetor normal unitário em uma face aponta na direção negativa do sistema de referência, as tensões positivas também apontam na direção negativa. O primeiro índice de uma tensão está relacionado à direção que é normal à face e o segundo índice está relacionado à direção da tensão.



y
σ_{yy}
σ_{yx}
σ_{yz}
σ_{zz}
σ_{zx}
σ_{xy}
σ_{xz}
σ_{xx}
σ_{zy}
σ_{zy}
σ_{xx}
σ_{zx}
σ_{xz}
σ_{xy}
x
σ_{zz}
σ_{yz}
σ_{yx}
σ_{yy}
z

2) Equação Diferencial de Quantidade de Movimento

Vamos tomar um elemento diferencial de fluido no plano *xy*. Toda a nossa análise será feita em duas dimensões e posteriormente extendida para três dimensões.



Em duas dimensões, o volume da partícula material retangular de fluido é dado por $dx\,dy$. Se temos o tensor das tensões σ_{ij} no centróide da partícula material, a figura representa como ficam as tensões nas faces levando em conta a variação espacial desse tensor com os comprimentos dx e dy . As áreas nas quais agem as tensões de contato são simplesmente os comprimentos dos lados da partícula dx e dy.

Da segunda lei de Newton:

$$m\,\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} \tag{1}$$

As forças externas serão dadas pelas forças de campo (tipicamente a força gravitacional) e pelas forças de contato agindo na superfície do elemento material. Para o elemento bidimensional teremos:

$$\rho\,dx\,dy\,\vec{a} = \rho\,dx\,dy\,\vec{g} + \vec{F}_{contato} \tag{2}$$

Na direção x:

$$\begin{aligned}\rho\, dx\, dy\, a_x = \rho\, dx\, dy\, g_x &+ \left(\sigma_{xx} + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2} \right) dy - \left(\sigma_{xx} - \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\frac{dx}{2} \right) dy \\ &+ \left(\sigma_{yx} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2} \right) dx - \left(\sigma_{yx} - \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y}\frac{dy}{2} \right) dx \end{aligned} \qquad (3)$$

Na direção y:

$$\begin{aligned}\rho\, dx\, dy\, a_y = \rho\, dx\, dy\, g_y &+ \left(\sigma_{xy} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}\frac{dx}{2} \right) dy - \left(\sigma_{xy} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}\frac{dx}{2} \right) dy \\ &+ \left(\sigma_{yy} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}\frac{dy}{2} \right) dx - \left(\sigma_{yy} - \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}\frac{dy}{2} \right) dx \end{aligned} \qquad (4)$$

É fácil ver que resultam:

$$\rho\ a_x = \rho\ g_x + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} \tag{5}$$

$$\rho\ a_y = \rho\ g_y + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \tag{6}$$

Observe que podemos generalizar isso para:

$$\boxed{\rho\ a_i = \rho\ g_i + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j}} \tag{7}$$

Nesta última expressão a_1, a_2, a_3 representam a_x, a_y, a_z; g_1, g_2, g_3 representam g_x, g_y, g_z e x_1, x_2, x_3 representam x, y, z.

Extendendo agora a análise para três dimensões e introduzindo a expressão da aceleração usando o conceito de derivada material:

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\rho\ g_x+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zx}}{\partial z}} \qquad (8)$$

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+w\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right)=\rho\ g_y+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zy}}{\partial z}} \qquad (9)$$

$$\boxed{\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right)=\rho\ gz+\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_{zz}}{\partial z}} \qquad (10)$$

Essas são as expressões da equação diferencial da Quantidade de Movimento de Cauchy, expressa em forma simbólica por:

$$\boxed{\rho\left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}.\nabla)\vec{u}\right] = \rho\,\vec{g} + \nabla.\vec{\vec{\sigma}}} \tag{11}$$

Nesta última equação, $\vec{\vec{\sigma}}$ é o tensor das tensões, e a operação $\nabla.\vec{\vec{\sigma}}$ é dada por:

$$\nabla.\vec{\vec{\sigma}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

A equação de Navier-Stokes é obtida quando a equação constitutiva do tensor das tensões para um fluido Newtoniano é inserida na Eq. (11).

3) Equação constitutiva do tensor das tensões para fluido Newtoniano

A equação constitutiva do tensor das tensões para fluido Newtoniano é dada por:

$$\boxed{\sigma_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - \delta_{ij}\frac{2}{3}\mu\nabla.\vec{u}} \qquad (12)$$

Onde δ_{ij} é a chamada função Delta de Kronecker, dada por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Resultam as tensões:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right) \quad \sigma_{xz} = \sigma_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad \sigma_{yz} = \sigma_{zy} = \mu\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu\nabla.\vec{u}$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial \upsilon}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu\nabla.\vec{u}$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3}\mu\nabla.\vec{u}$$

4) Equação de Navier-Stokes

Inserindo a equação constitutiva do tensor das tensões, Eq. (12), na equação diferencial da quantidade de movimento de Cauchy, Eq (11), obtemos a Equação de Navier-Stokes para um escoamento compressível:

$$\rho\left[\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}+(\vec{u}.\nabla)\vec{u}\right]=-\nabla p+\nabla.\left[\mu\left(\nabla\vec{u}^{T}+\nabla\vec{u}\right)\right]-\nabla\left(\frac{2}{3}\mu\nabla.\vec{u}\right)+\rho\,\vec{g} \tag{13}$$

Onde $\nabla\vec{u}$ é o chamado tensor gradiente de velocidades, e $\nabla\vec{u}^{T}$ é o seu transposto:

$$\nabla\vec{u}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial \upsilon}{\partial x} & \frac{\partial \upsilon}{\partial y} & \frac{\partial \upsilon}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}\quad;\quad \nabla\vec{u}^{T}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial \upsilon}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x}\\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial \upsilon}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial \upsilon}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}$$

As componentes da Eq. (13) são:

$$\rho\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\right]=-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial \upsilon}{\partial x}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{2}{3}\mu\nabla.\vec{u}\right)+\rho g_x$$

$$\rho\left[\frac{\partial \upsilon}{\partial t}+u\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y}+w\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right]=-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2\frac{\partial \upsilon}{\partial y}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2}{3}\mu\nabla.\vec{u}\right)+\rho g_y$$

$$\rho\left[\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+\upsilon\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\right]=-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial \upsilon}{\partial z}\right)\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right]-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{2}{3}\mu\nabla.\vec{u}\right)+\rho g_z$$

Para um escoamento incompressível, a Eq. (13) pode ser simplificada, pois pela equação da continuidade $\nabla.\vec{u} = 0$. Introduzindo também a viscosidade cinemática $\nu = \mu / \rho$:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}.\nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla.\left[\nu\left(\nabla \vec{u}^{T} + \nabla \vec{u}\right)\right] + \vec{g}} \qquad (14)$$

E, indo mais além, se a viscosidade cinemática é uniforme, podemos retirá-la de dentro dos colchetes. Após alguma álgebra:

$$\boxed{\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^{2} \vec{u} + \vec{g}} \qquad (15)$$

A equação de Navier-Stokes para escoamento incompressível com viscosidade cinemática uniforme, Eq. (15), é aquela para a qual se conhecem algumas soluções analíticas.

As componentes da Eq. (15) são:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + g_x$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial t} + u\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial \upsilon}{\partial y} + w\frac{\partial \upsilon}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial z^2}\right) + g_y$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + \upsilon\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + g_z$$

4) Condições de Contorno da Equação de Navier-Stokes

Numa parede impermeável, a velocidade do fluido tem que igualar a velocidade da parede:

$$\vec{u} = \vec{u}_{\text{parede}}$$

Numa parede porosa, a componente tangencial da velocidade do fluido tem que igualar a componente tangencial da velocidade da parede, e a componente normal da velocidade do fluido tem que ser especificada de acordo com a velocidade de sucção ou injeção desejada. Assim, se na parede definimos um versor normal $\vec{e}_n$ e um versor tangente $\vec{e}_s$:

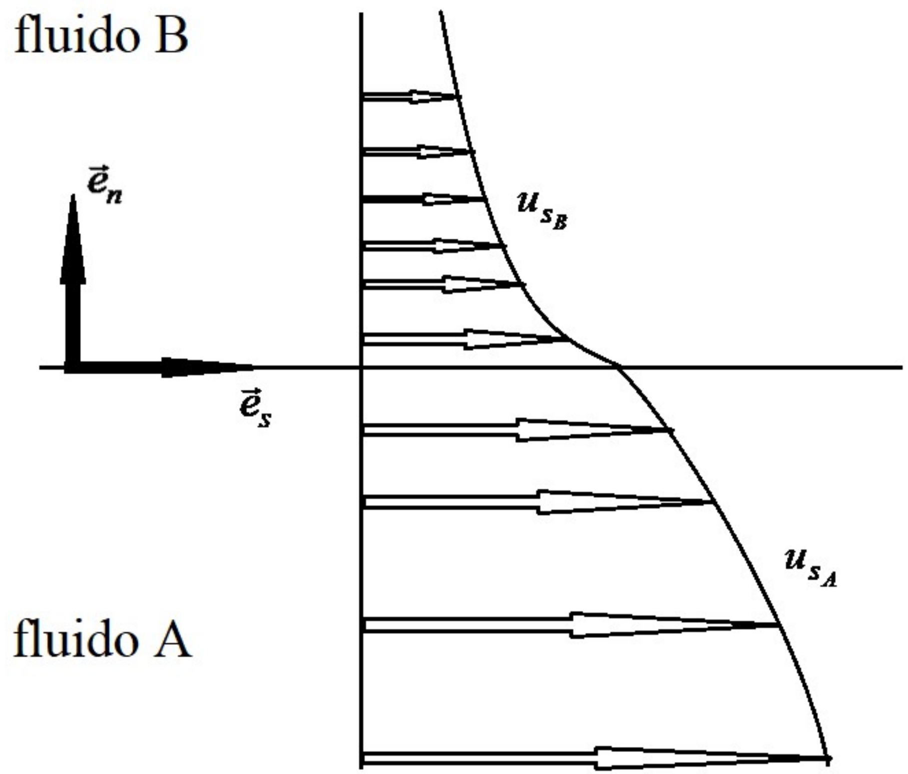
$$u_s = u_{s_{\text{parede}}} \qquad u_n = u_{n_{\text{sucção ou injeção}}}$$

Numa interface entre dois fluidos A e B, a velocidade dos dois fluidos tem que ser igual, e as tensões de cisalhamento dos dois fluidos também tem que ser iguais na interface. Assim, se na interface definimos um versor normal $\vec{e}_n$ e um versor tangente $\vec{e}_s$, na interface:

$$\vec{u}_A = \vec{u}_B$$

$$\tau_{\text{interface}\,A} = \tau_{\text{interface}\,B} \;\Rightarrow\; \mu_A \left.\frac{\partial u_{s_A}}{\partial n}\right|_{\text{interface}} = \mu_B \left.\frac{\partial u_{s_B}}{\partial n}\right|_{\text{interface}}$$

onde $u_s = \vec{u} . \vec{e}_s$



Condições de Contorno numa interface entre dois fluidos A e B

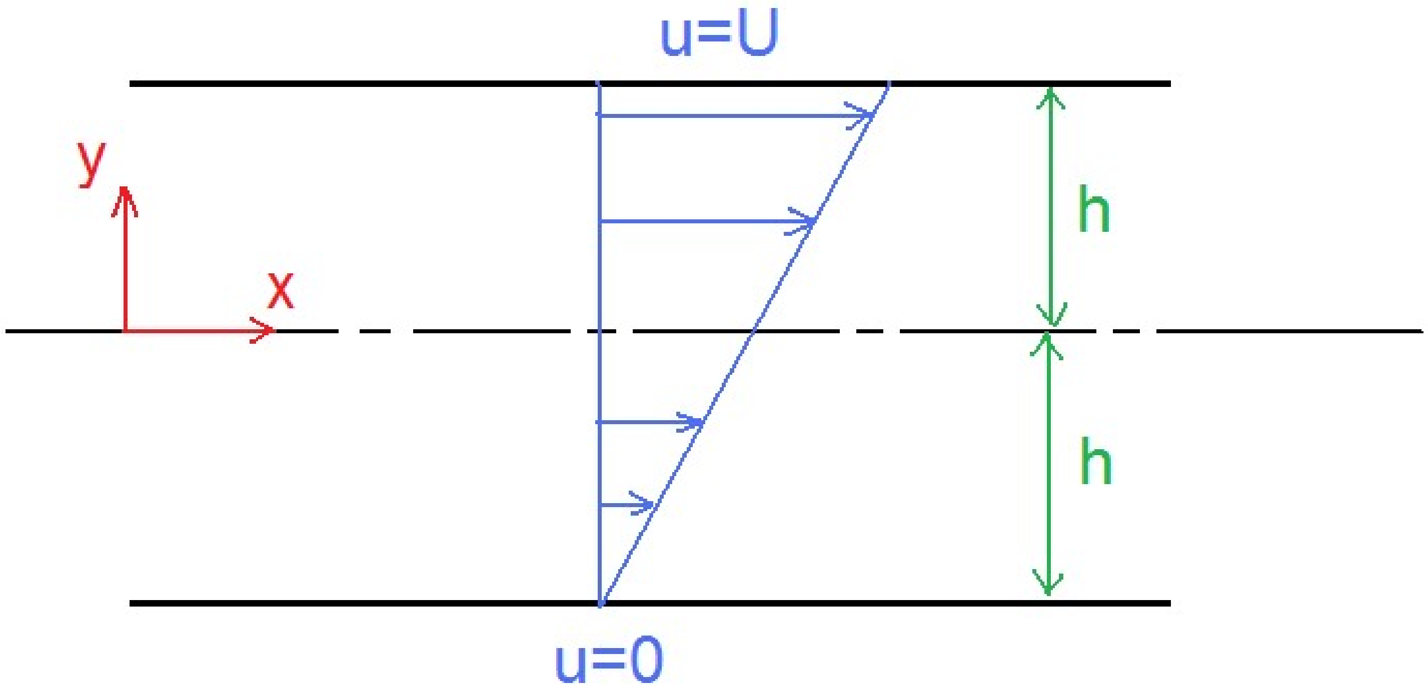
$$\vec{u}_A = \vec{u}_B$$

$$\tau_{\text{interface } A} = \tau_{\text{interface } B} \Rightarrow \mu_A \left.\frac{\partial u_{s_A}}{\partial n}\right|_{\text{interface}} = \mu_B \left.\frac{\partial u_{s_B}}{\partial n}\right|_{\text{interface}}$$

onde $u_s = \vec{u} . \vec{e}_s$

5) Algumas Soluções Analíticas da Equação de Navier-Stokes

a)Escoamento de Couette entre uma placa fixa e uma placa móvel de velocidade *U*.



Hipóteses:
-escoamento permanente, incompressível, bidimensional;
-escoamento desenvolvido ($\partial u/\partial x = 0$);
-escoamento laminar;
-sem gradiente de pressão;
-efeitos gravitacionais desprezíveis.

Da equação da continuidade:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0$$

Como o escoamento é desenvolvido, temos que:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{0} + \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{\partial \upsilon}{\partial y} = 0$$

Como, para qualquer x, $\upsilon = 0$ na parede ($y = h$ ou $y = -h$), se υ não varia com y, $\upsilon = 0$ em todo o campo de escoamento.

Da equação de Navier-Stokes na direção x:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{0} + u\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{0} + \underbrace{\upsilon}_{0}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x}}_{0} + \nu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \underbrace{g_x}_{0}$$

Como u é função apenas de y, podemos usar o sinal de derivada total:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = 0$$

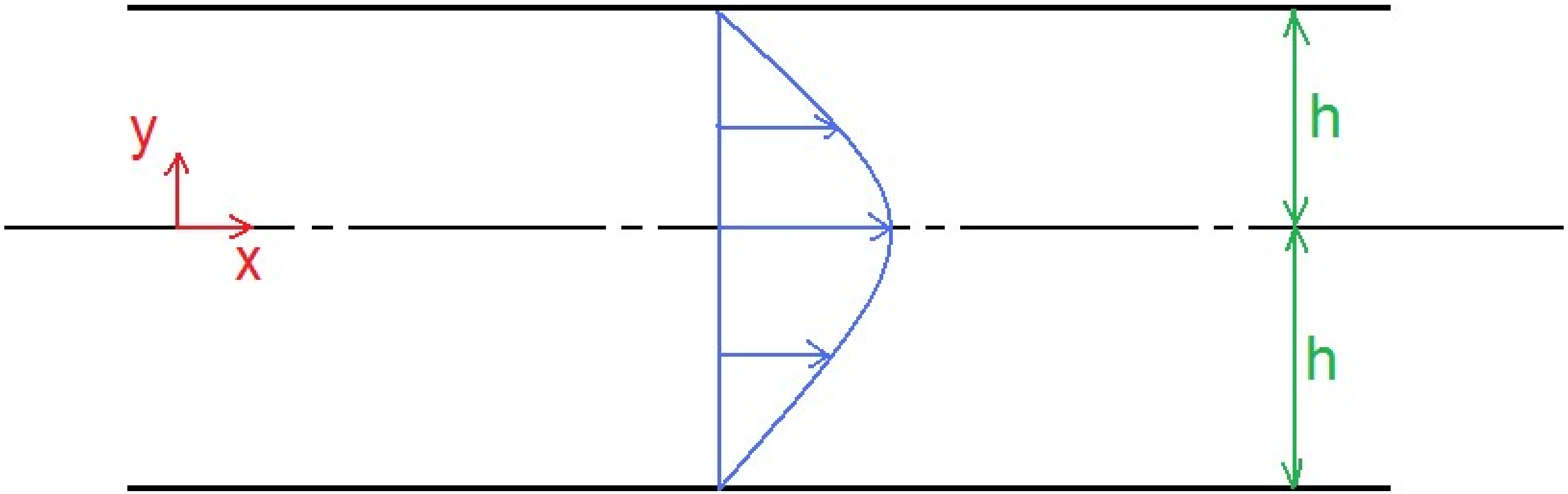
Integrando duas vezes:

$$u = C_1 y + C_2$$

As constantes são determinadas através das condições de contorno, $u = 0$ para $y = -h$ e $u = U$ para $y = +h$. Assim, temos o perfil de velocidades:

$$\boxed{u = \frac{U}{2h} y + \frac{U}{2}}$$

b)Escoamento entre duas placas fixas com gradiente de pressão. Chamado de escoamento plano de Poiseuille.



Hipóteses:
-escoamento permanente, incompressível, bidimensional;
-escoamento desenvolvido ($\partial u / \partial x = 0$);
-escoamento laminar;
-efeitos gravitacionais desprezíveis.

Novamente, como o escoamento é desenvolvido, $\upsilon = 0$ em todo o campo. A equação de Navier-Stokes na direção x fica:

$$\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{0} + u \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}_{0} + \underbrace{\upsilon}_{0} \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{0} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \underbrace{g_x}_{0}$$

A equação de Navier-Stokes na direção y fica:

$$\underbrace{\frac{\partial \upsilon}{\partial t}}_{0}+u\underbrace{\frac{\partial \upsilon}{\partial x}}_{0}+\underbrace{\upsilon}_{0}\underbrace{\frac{\partial \upsilon}{\partial y}}_{0}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\underbrace{\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}}_{0}+\underbrace{\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}}_{0}\right)+\underbrace{g_y}_{0}$$

Logo:

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0$$

Temos que u só varia com y e p só varia com x. Podemos escrever, usando derivadas totais:

$$\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}=\frac{d^2u}{dy^2}$$

Além disso, *dp/dx* tem que ser constante, pois se derivarmos os dois lados da expressão em relação a x, como u não é função de x o resultado será $\frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dx}\right)=0$.

Integrando em y:

$$u=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dx}\frac{y^2}{2}+C_1 y+C_2$$

Temos as condições de contorno u = 0 para y = +h e y = -h, resultando o perfil de velocidades:

$$\boxed{u = -\frac{h^2}{2\mu}\frac{dp}{dx}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right)}$$

6) A equação de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas para um escoamento incompressível com viscosidade uniforme

O operador gradiente (vetor nabla) em coordenadas cilíndricas é dado por:

$$\nabla = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{\partial}{r\partial \theta} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Em coordenadas cilíndricas, o laplaciano da Eq. (15) pode ser obtido se lembrarmos que o laplaciano é o divergente de um gradiente. Assim:

$$\nabla^2 = \nabla.\nabla = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Aplicando esse operador à velocidade em coordenadas cilíndricas, a Eq. (15) resulta nas componentes:

$$\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+u_\theta\frac{\partial u_r}{r\partial\theta}+u_z\frac{\partial u_r}{\partial z}-\frac{u_\theta^2}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}+g_r+ \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_r}{\partial r}\right)-\frac{u_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_r}{\partial\theta^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2}\right] \tag{16}$$

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+u_\theta\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}+u_z\frac{\partial u_\theta}{\partial z}+\frac{u_\theta u_r}{r}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{r\partial\theta}+g_\theta+ \nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}\right)-\frac{u_\theta}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2}\right] \tag{17}$$

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_z}{\partial r}+u_\theta\frac{\partial u_z}{r\partial\theta}+u_z\frac{\partial u_z}{\partial z}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+g_z+$$
$$\nu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u_z}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}\right] \tag{18}$$

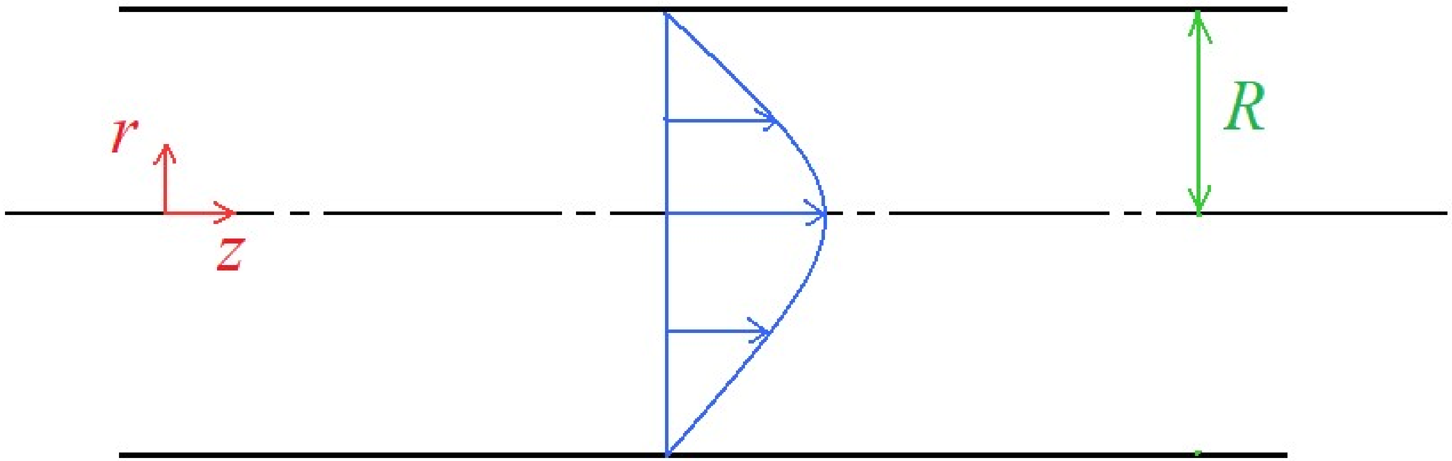
Essas equações são usadas conjuntamente com a equação da continuidade:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_r)+\frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta}+\frac{\partial u_z}{\partial z}=0 \tag{19}$$

7) Exemplo de solução analítica da equação de Navier-Stokes em coordenadas cilíndricas

Obtenha o perfil de velocidade do Escoamento de Poiseuille em um conduto de seção cilíndrica de raio *R* e diâmetro *D*. Mostre que o coeficiente de perda de carga distribuída de um escoamento laminar é:

$$f = \frac{64}{\mathrm{Re}}$$



Hipóteses:

-escoamento permanente e incompressível;

-escoamento bidimensional axissimétrico, ou seja, $\dfrac{\partial}{\partial \theta}=0$;

-escoamento desenvolvido ($\partial u_z / \partial z = 0$);

-$u_\theta = 0$;

-escoamento laminar;

-efeitos gravitacionais desprezíveis.

Da equação da continuidade:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,u_r)+\underbrace{\frac{\partial u_z}{\partial z}}_{0}=0$$

Resulta que $\dfrac{\partial}{\partial r}(r u_r) = 0$. Como o produto $r u_r$ é nulo na parede, em $r = R$, resulta que o produto $r u_r = 0$ em todo o escoamento. Como $r \neq 0$ em geral, e na linha de centro, onde $r = 0$, temos $u_r = 0$, podemos concluir que $u_r = 0$ em todo o campo de escoamento.

Assim, da equação de Navier-Stokes na direção z:

$$\underbrace{\frac{\partial u_z}{\partial t}}_{0} + \underbrace{u_r}_{0} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \underbrace{u_\theta}_{0} \frac{\partial u_z}{r \partial \theta} + u_z \underbrace{\frac{\partial u_z}{\partial z}}_{0} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \underbrace{g_z}_{0} +$$

$$\nu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \underbrace{\frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2}}_{0} \right]$$

Temos portanto que:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{\partial p}{\partial z}$$

Das equações nas direções radial e tangencial, é fácil ver que:

$$\frac{\partial p}{\partial r}=\frac{\partial p}{\partial \theta}=0$$

Assim, como $u_z = u_z(r)$ e $p = p(z)$, podemos usar símbolo de derivada total no lugar de derivada parcial:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{du_z}{dr}\right)=\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}r$$

Note que, da expressão anterior, conclui-se que o gradiente de pressão é constante, pois se derivarmos com relação a z os dois lados da expressão, como $u_z = u_z(r)$ vamos obter $\frac{d}{dz}\left(\frac{dp}{dz}\right) = 0$. Por isso a linha piezométrica de um duto de seção constante é uma reta.

Integrando a primeira vez:

$$r\frac{du_z}{dr} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\frac{r^2}{2} + C_1$$

Que fica:

$$\frac{du_z}{dr} = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\frac{r}{2} + \frac{C_1}{r}$$

Integrando a segunda vez:

$$u_z = \frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\frac{r^2}{4} + C_1 \ln r + C_2$$

Temos duas condições de contorno: a velocidade deve ser nula na parede, em $r = R$, e deve ser finita na linha de centro, em $r = 0$.

Da condição de velocidade finita na linha de centro: $C_1 = 0$.

Da condição de velocidade nula na parede:

$$C_2 = -\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz}\frac{R^2}{4}$$

Resulta o perfil de velocidades:

$$\boxed{u_z = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}R^2\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}$$

Resulta um perfil de velocidade parabólico com a velocidade máxima na linha de centro dada por:

$$\boxed{V_{\max} = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp}{dz}R^2} \quad \text{de modo que} \quad \boxed{u_z = V_{\max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]}$$

Note que essa velocidade é positiva pois por causa da perda de carga o gradiente de pressão é negativo.

Calculando a velocidade média:

$$V = \frac{1}{S}\int_s u_z\, dS = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R V_{\max}\left[1-\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]2\pi\, r\, dr = \frac{V_{\max}}{2}$$

Assim, a velocidade média fica:

$$\boxed{V = -\frac{1}{8\mu}\frac{dp}{dz}R^2}$$

A perda de carga distribuída, num trecho reto de duto horizontal de seção constante com comprimento L, com o escoamento indo de (1) para (2), será dada por:

$$\frac{p_1 - p_2}{\gamma} = h_f = f \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g}$$

Substituindo uma velocidade pela expressão obtida da integração do perfil:

$$\frac{p_1 - p_2}{\rho g L} = f \frac{1}{D} \frac{V}{2g} \left(-\frac{1}{8\mu} \frac{dp}{dz} R^2 \right)$$

Note agora que, como $\frac{dp}{dz}$ é contante, $\frac{p_1 - p_2}{L} = -\frac{dp}{dz}$. Assim:

$$\frac{1}{\rho} = f\,\frac{1}{D}\,\frac{V}{2}\left(\frac{1}{8\mu}R^2\right)$$

Mas $R^2 = \dfrac{D^2}{4}$. Assim:

$$\frac{1}{\rho} = f\,\frac{1}{D}\,\frac{V}{2}\left(\frac{1}{32\mu}D^2\right)$$

Resulta:

$$\boxed{f = \frac{64\mu}{\rho V D} = \frac{64}{\mathrm{Re}}}$$

Bibliografia:

White, F.M., “Mecânica dos Fluidos”, 5º edição, Ed. McGraw Hill, 2010.

Potter, M.C.; Wiggert, D.C., “Mecânica dos Fluidos”, Ed. Thomson Learning, 2004.

Mase, G.T.; Mase, G.E., “Continuum Mechanics for Engineers”, third edition, CRC Press, 1999.