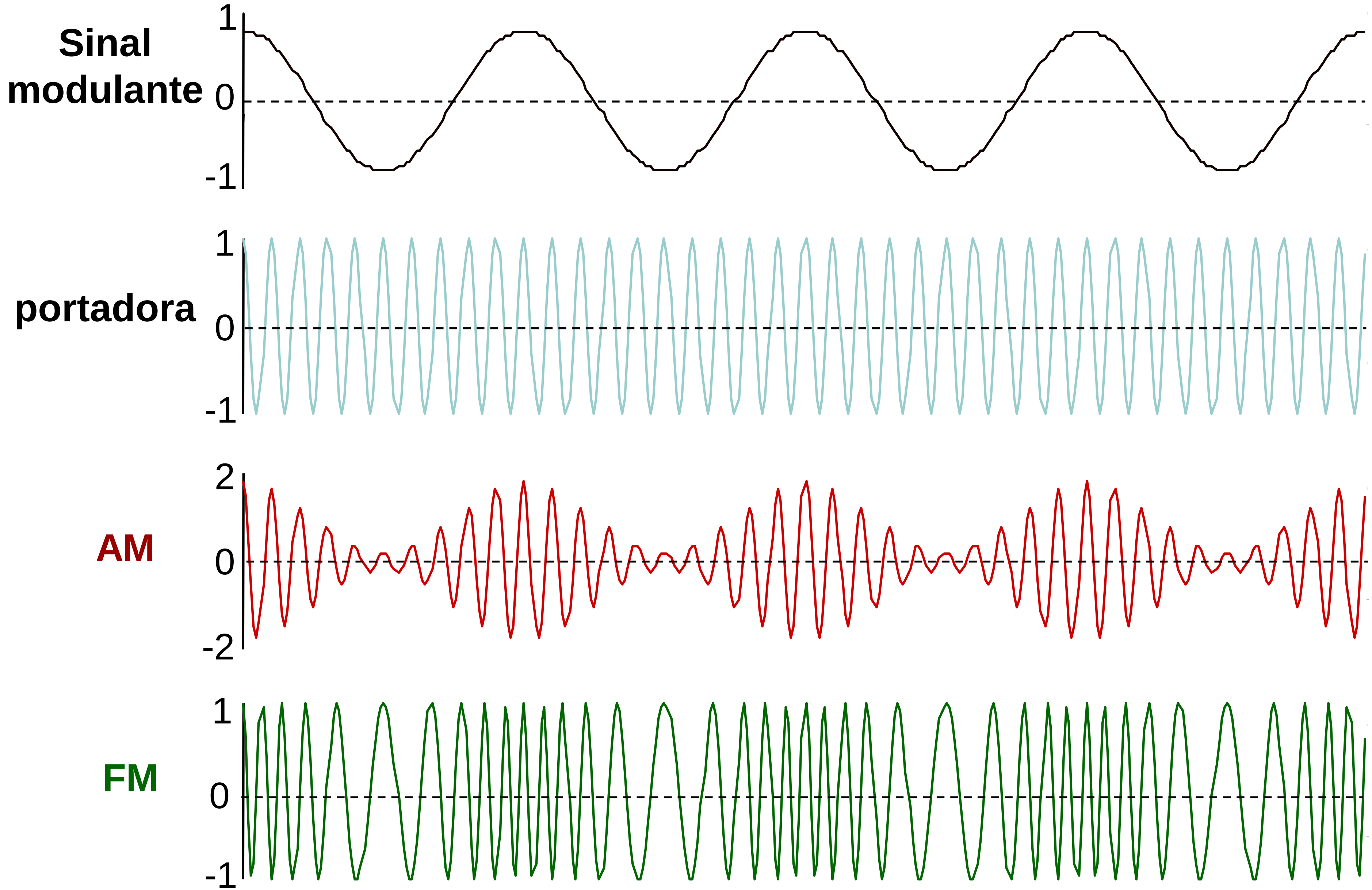
Princípios de Comunicação

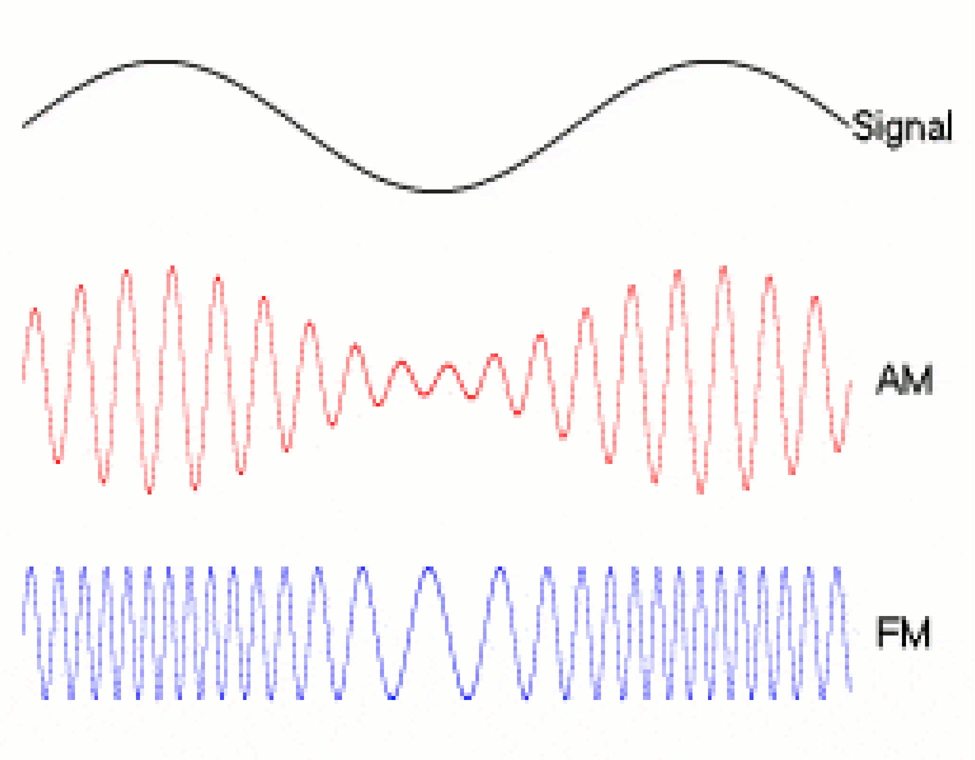
Tania Regina Tronco

trtronco@gmail.com



Sinal modulante
1
0
-1
portadora
1
0
-1
AM
2
0
-2
FM
1
0
-1

Modulação FM
(*Frequency Modulation*)



Modulação Angular

Definição

- Neste tipo de modulação o ângulo da portadora varia de acordo com o sinal em banda base.

$$e(t) = E_o \cos[\theta_i(t)]$$

- Neste tipo de modulação temos:

a) Modulação em frequência (FM);

b) Modulação em fase (PM);

Definições

- Modulação em fase: O ângulo da portadora varia linearmente com o sinal de mensagem $e_m(t)$.

$$e(t) = E_0 \cos[2\pi f_0 t + k_p e_m(t)]$$

- f_0 é a frequência da portadora não modulada;
- k_p é a sensibilidade do modulador;

Definições

- Modulação em frequência: A frequencia instantânea varia linearmente com a portadora.

$$f_i(t) = f_0 + k_f e_m(t)$$

- f_0 é a frequência da portadora não modulada;
- k_f é a sensibilidade do modulador

Modulação FM

- A frequência instantânea de um sinal é dada por:

$$f_i = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta}{dt}$$

- Onde θ é a fase do sinal em radianos.

Assim, se a partir da frequência, quisermos obter a fase tem-se que:

$$\theta = 2\pi \int f_i . dt$$

Modulação FM

- Assim, se quisermos obter um sinal FM, tem-se que:

$$e(t) = E_0 \cos[\theta_i(t)] \quad (1)$$

$$f_i(t) = f_0 + k_f e_m(t) \quad (2)$$

- Substituindo (2) em (3), tem-se que:

$$\theta_i = 2\pi \int f_i . dt \quad (3)$$

- Finalmente, tem-se o sinal FM, dado por:

$$\theta_i = 2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int e_m(t) dt$$

$$e(t) = E_0 \cos[2\pi f_0 t + 2\pi k_f \int e_m(t) dt]$$

Modulação FM

- Observa-se que o processo de modulação FM é um processo não linear, pois o sinal e(t) é uma função não linear do sinal de mensagem $e_m(t)$.

- Isto dificulta sobremaneira a análise espectral do sinal, ao contrário do sistema de modulação em amplitude.

Modulação FM

- Consideremos um sinal senoidal como sinal modulador. Assim, tem-se que:

$$e_m(t) = E_m \cos(2\pi f_m t)$$

- Assim, a frequência do sinal modulado pode ser escrita como:

$$f_i = f_o + k_f E_m \cos(2\pi f_m t) =$$
$$= f_o + \Delta f .\cos(2\pi f_m t)$$

- Onde $\Delta f = k_f . E_m$ é chamado de desvio de frequência.

Modulação FM

- Assim sendo, o sinal FM pode ser escrito como:
- $$e(t) = E_o \cos[\theta_i(t)]$$

$$f_i = f_o + \Delta f.\cos(2\pi f_m t)$$

$$\theta_i(t) = 2\pi \int_0^t f_i(\tau)\, d\tau = 2\pi\, f_o\, t + \frac{\Delta f}{f_m}.sen(2\pi\, f_m\, t) =$$

$$= 2\pi\, f_o t + \beta.sen(2\pi\, f_m\, t)$$

- $\beta=\Delta f/f_m$ é chamado de índice de modulação do sinal FM

Modulação FM

- O sinal FM pode então ser escrito como:

$$e(t) = E_o \cos[2\pi f_o t + \beta\, sen(2\pi f_m t)]$$

- Se β for pequeno comparado a 0,2, tem-se a modulação FM faixa estreita
- Se β for grande comparado a 0,2, tem-se a modulação FM faixa larga

Modulação FM

- O sinal FM pode ser escrito como:

$$e(t) = \mathrm{Re}[E_o e^{j2\pi f_o t} . e^{j\beta \sin(2\pi f_m t))}] =$$

$$= \mathrm{Re}[\tilde{e}(t) e^{j2\pi f_o t}]$$

- $\tilde{e}(t)$ é chamado de envelope complexo do sinal FM

$$\tilde{e}(t) = E_0 e^{j\beta sen(2\pi f_m t)}$$

- Observar que este sinal é periódico, portanto é possível determinar a sua série de Fourier Complexa.

Modulação Faixa Larga

- Determinemos os coeficientes da série de Fourier complexa.

$$\tilde{e}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi n f_m t}$$

- Onde os coeficientes são calculados da seguinte forma:

$$c_n = f_m \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \tilde{e}(t) e^{-j2\pi n f_m t} dt =$$

$$= f_m E_0 \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{j\beta sen(2\pi f_m t) - j2\pi n f_m t} dt$$

Função de Bessel de n-ésima ordem e primeira espécie:

$$J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[j\left(\beta \operatorname{sen}(x) - nx\right)\right]dx$$

Considerando $x = 2\pi f_m t$, temos:

$$c_n = A_c J_n(\beta)$$

Assim,

$$\tilde{s}(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta)\exp\left(j2\pi n f_m t\right)$$

Modulação FM

- O resultado desta integral não é analítico, assim, tem-se como resultado as funções de Bessel, tal que:

$$c_n = E_0 J_n(\beta)$$

- Substituindo-se na representação inicial do sinal, tem-se que:

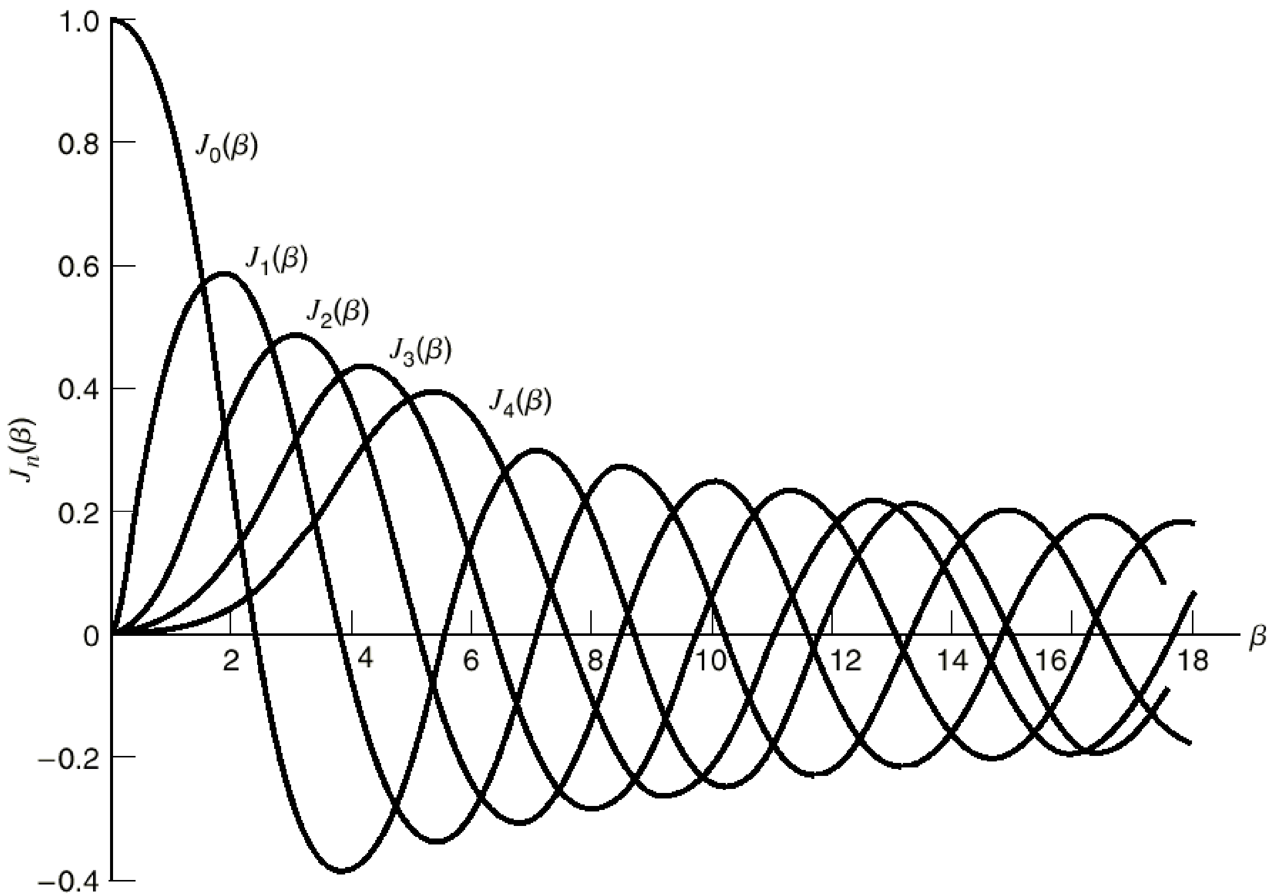
$$e(t) = E_0 \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\beta) \cos[2\pi(f_0 + nf_m)t]$$

- Cuja transformada de Fourier é:

$$E(f) = \frac{E_0}{2} \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\beta)[\delta(f - f_0 - nf_m) + \delta(f + f_0 + nf_m)]$$

Modulação Faixa Larga

$$E(f) = \frac{E_0}{2}\sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\beta)[\delta(f - f_0 - nf_m) + \delta(f + f_0 + nf_m)]$$



Funções de Bessel

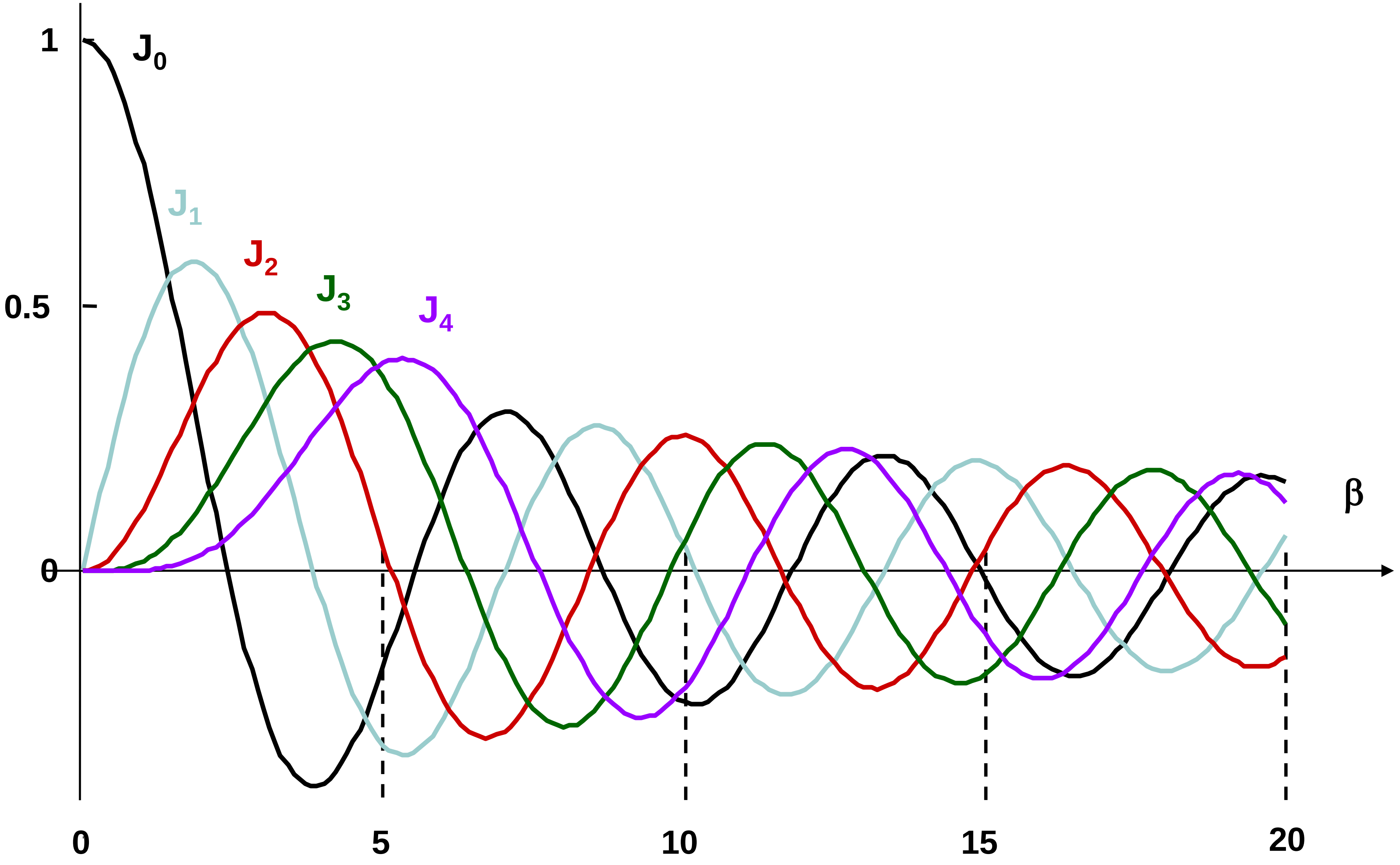


Tabela das funções de Bessel

$$E_n = J_n(\beta) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j(\beta\, sen\theta - \theta)}\, d\theta$$

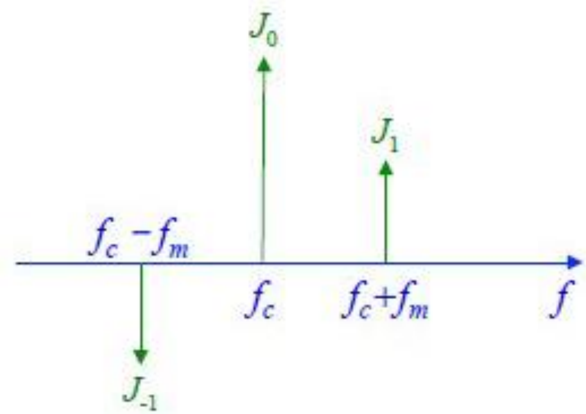
β	J_0	J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	J_{11}
0.0	1.00											
0.25	0.98	0.12										
0.3	0.94	0.24	0.03									
1.0	0.77	0.44	0.11	0.02								
2.0	0.22	0.58	0.35	0.13	0.03							
3.0	-0.26	0.34	0.49	0.31	0.12	0.04	0.01					
5.0	-0.18	-0.33	0.05	0.36	0.39	0.26	0.13	0.05	0.02			
8.0	0.17	0.23	-0.11	-0.29	-0.10	0.19	0.34	0.32	0.22	0.13	0.06	0.03

Propriedade 1: Para valores pequenos de $\beta << 1$ a onda FM assume a forma de faixa estreita, consistindo da portadora e de duas componentes laterais.

$$J_0(\beta) \approx 1$$

$$J_1(\beta) \approx \beta/2$$

$$J_n(\beta) \approx 0 \quad \text{para } n > 1$$

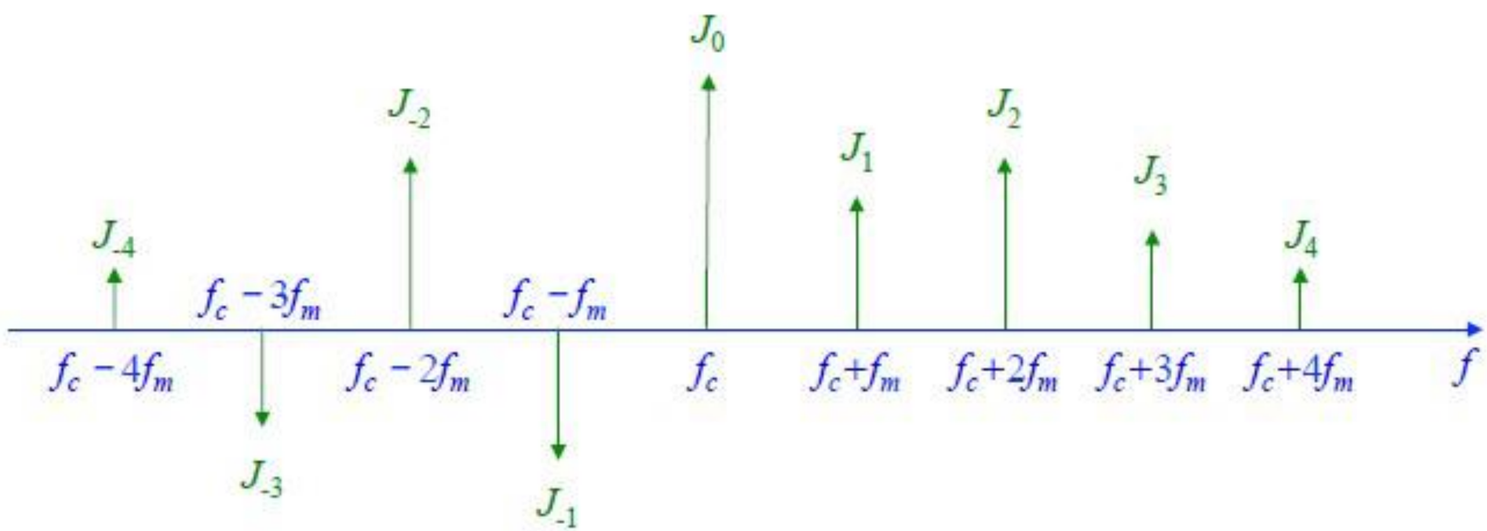


Válido para $\beta \leq 0{,}3$ Assim,

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + \frac{\beta A_c}{2} \cos\left[j2\pi (f_c + f_m) t \right] - \frac{\beta A_c}{2} \cos\left[j2\pi (f_c - f_m) t \right]$$

Similar a uma modulação AM.

Propriedade 2: Para valores grandes de $\beta > 1$ a onda FM possui uma portadora e um número infinito de componentes laterais simétricas.



Propriedade 3: A envoltória de uma onda FM é constante, então sua potência dissipada em um resistor de 1 Ω também é constante.

Largura de faixa de ondas FM:

Teoria: largura de faixa infinita.

Prática: apenas as componentes significativas de frequências laterais.

Regra de Carson:

$$B \approx 2\Delta f + 2 f_m = 2\Delta f\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)$$

onde B = largura de faixa do sinal modulado

$\Delta f = k_f A_m$ = desvio de frequência

Largura de faixa FM mais precisa:

Largura de faixa de 99% de uma onda FM é a separação entre duas frequências além das quais nenhuma das frequências laterais é maior que 1% da amplitude de portadora obtida quando a modulação é removida.

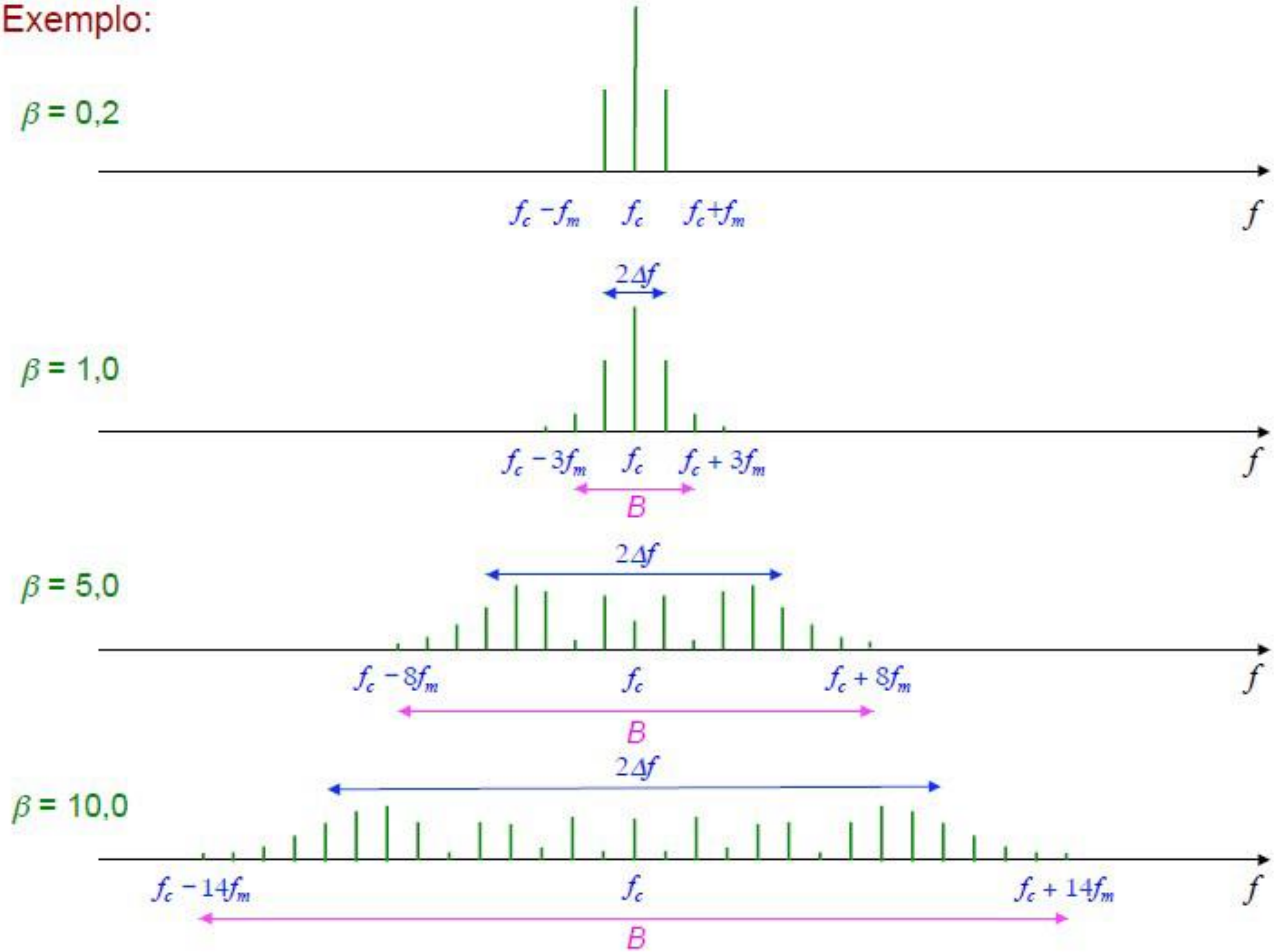
Assim, a largura de faixa de transmissão é igual a $2n_{max}f_m$, onde f_m é a frequência da moduladora e n_{max} é o máximo valor inteiro que satisfaz a condição:

$$\left|J_n(\beta)\right| > 0{,}01$$

Número total de frequências laterais significativas para diferentes valores de β:

Índice de Modulação β	Nº de frequências laterais significativas $2n_{max}$
0,1	2
0,3	4
0,5	4
1,0	6
2,0	8
5,0	16
10,0	28
20,0	50
30,0	70

Exemplo:



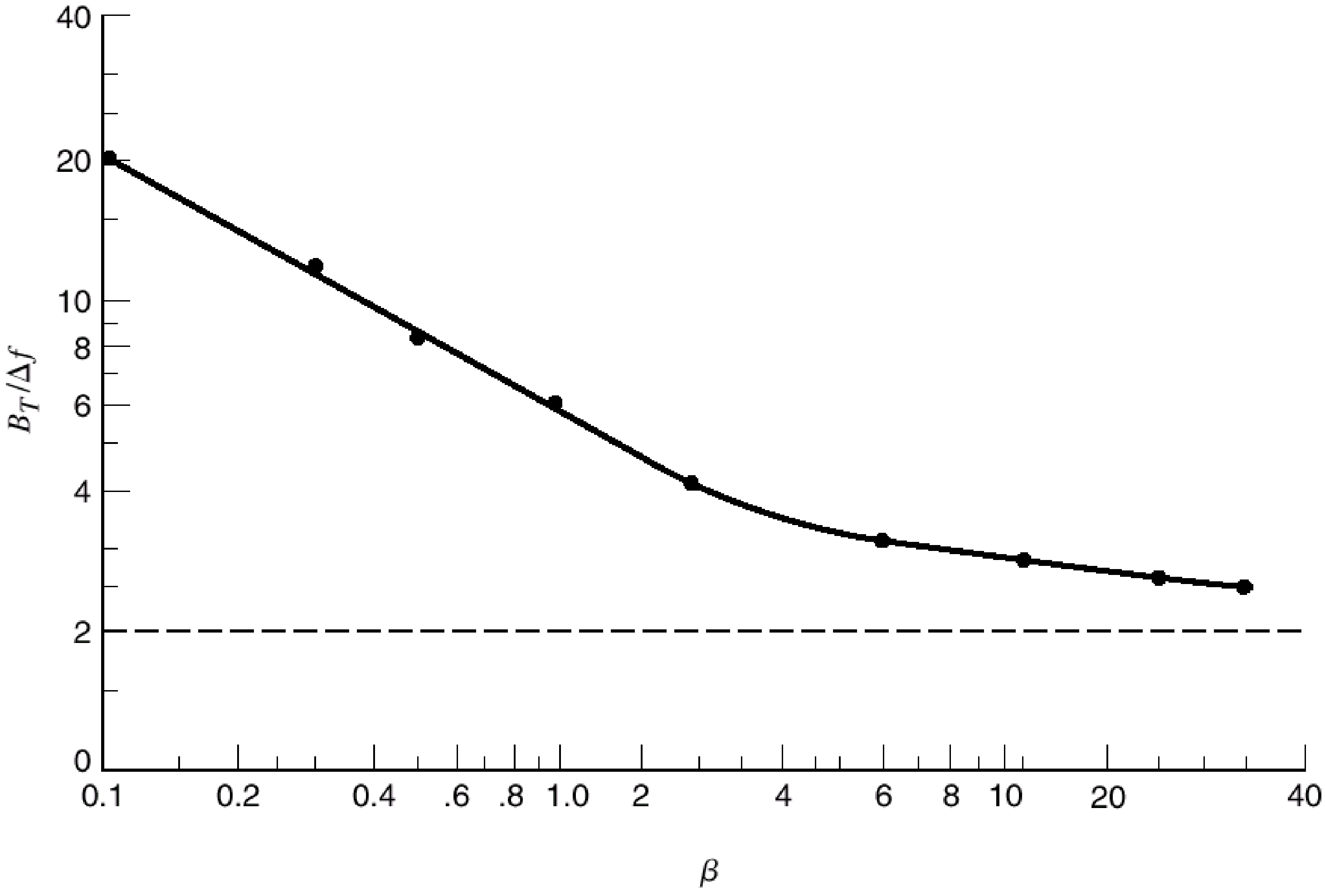
β = 0,2
$f_c - f_m$
f_c
$f_c + f_m$
f
$2\Delta f$
β = 1,0
$f_c - 3f_m$
f_c
$f_c + 3f_m$
f
B
$2\Delta f$
β = 5,0
$f_c - 8f_m$
f_c
$f_c + 8f_m$
f
B
$2\Delta f$
β = 10,0
$f_c - 14f_m$
f_c
$f_c + 14f_m$
f
B

Se a mensagem não for um tom, mas um sinal com máxima frequência W, a largura de faixa é estimada utilizando a situação de pior caso.

$D = \Delta f/W$: razão de desvio, definida como uma razão do desvio de frequência Δf, que corresponde a amplitude máxima possível da onda moduladora $m(t)$, com a maior frequência de modulação W.

β é então trocado por D.

Modulação Faixa Larga



Exemplo

- No padrão comercial, o máximo valor do desvio de frequência Δf é 75 kHz para FM comercial. Se a largura em banda base é de 15 kHz, que é tipicamente a máxima frequência de áudio de interesse, qual é largura de faixa requerida.

Exemplo

- O índice de modulação é dado pela razão entre o desvio máximo de frequência e a máxima frequência do sinal de modulação, ou seja:

$$\beta = \frac{\Delta_f}{f_m} = \frac{75\,kHz}{15\,kHz} = 5$$

- De acordo com o critério da regra de Carson

$$B_T = 2 \times 75(1 + \frac{1}{5}) = 180 \text{ kHz}$$

Exemplo

- De acordo com o critério de 1%, analisando-se o gráfico dado anteriormente, tem-se que:

$$B_T = 3.2\Delta f = 3.2(75) = 240\ \mathrm{kHz}$$

- Na prática é alocada para cada rádio FM uma largura de faixa de 200 kHz

Exemplos: Cálculo da largura de faixa com os seguinte dados:

β = 5 e Δf = 75 kHz: f_m = 15 kHz e $2\Delta f$ = 150 kHz:

- **Bw por Carlson:**

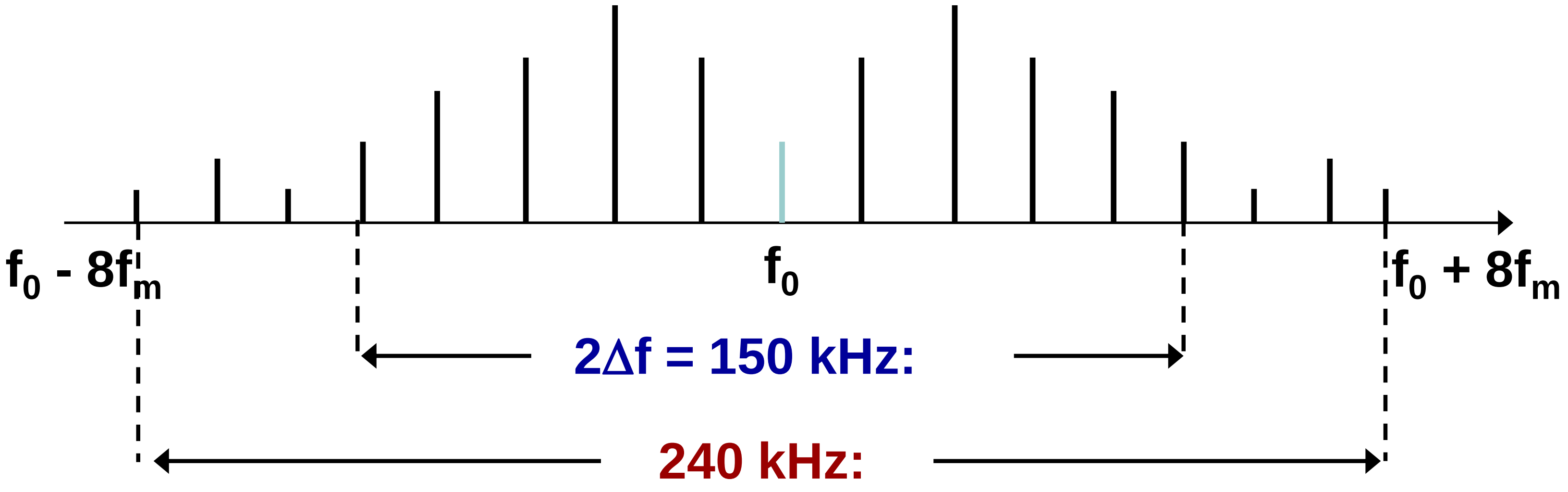
$$Bw = 2(\beta + 1) f_m = 2(5+1)15 = 180\ kHz$$

- **Bw pela tabela:**

$$Bw = 2 n_{MAX}\, f_m = 2 \times 8 \times 15 = 240\ kHz$$

- **Bw comercial:**

$$Bw = 200\ kHz = 150 + 2 \times 25\ kHz$$



Exemplo

Defina a largura de banda de um sinal modulado utilizando modulação FM. Se um sinal de áudio em banda base (largura de banda base $B_S = 20$ kHz) for modulado utilizando FM em uma frequência de 100.9 MHz e com um índice de modulação $\beta = \frac{1}{3}$, qual faixa de frequências e largura do canal necessário para transmitir esse sinal? Quais seriam as próximas duas estações de rádio FM possíveis antes/depois da 100.9 MHz?

$$\Delta f = \beta B_s = \frac{20k}{3}$$

$$B_{FM} = 2\Delta f + 2B_s = \frac{40k}{3} + 40k = \frac{160k}{3} = 53.333\ kHz$$

faixa de FM: $100.9\ \mathrm{MHz} - 0.05333\ \mathrm{MHz} < \mathbf{f} < 100.9\ \mathrm{MHz} + 0.05333\ \mathrm{MHz}$

próximas estações: $100.9\ \mathrm{MHz} \pm 0.10666\ \mathrm{MHz} \rightarrow 101.006\ \mathrm{MHz}$ e $100.79\ \mathrm{MHz}$

Exemplo

Dados os sinais $\boldsymbol{m}(t) = 10\,\mathbf{cos}(1000\pi t)$ V (**modulante**) e $\boldsymbol{p}(t) = 8\,\mathbf{cos}(20\pi \times 10^3 t)$ V (**portadora**), e assumindo modulação FM com taxa de modulação $\beta = 1$,

a. Obtenha desvio de frequência Δf

b. Defina a largura de banda B_{FM}.

$$\beta = \frac{\Delta f}{B_s} = 1$$

$$B_s = \Delta f = f_m = 500 \text{ Hz}$$

$$B_{FM} = 2\Delta f + 2B_s = 4f_m = 2\text{kHz}$$

Exemplo

Considere a onda senoidal modulante:

$$m(t) = 5cos(\omega_m t) \tag{1}$$

Sendo $\omega_m = 10000\pi \ rad/s$. O sinal modulate é usado para modular uma portadora em $\omega_c = 400000\pi \ rad/s$. Sendo $k_f = 4000\pi \ rad/(s.volt)$, determine o espectro do sinal FM

n/β	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0
0	0.998	0.990	0.938	0.765	0.224
1	0.05	0.100	0.242	0.440	0.577
2	-	0.005	0.0031	0.115	0.353
3	-	-	-	0.02	0.129
4	-	-	-	0.002	0.034
5	-	-	-	-	0.007

Exemplo (cont.)

Para desenharmos o espectro do sinal modulado precisamos definir β através de:

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\Delta f = \frac{k_f}{2\pi} \cdot \frac{m_{max} - m_{min}}{2}$$

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m}$$

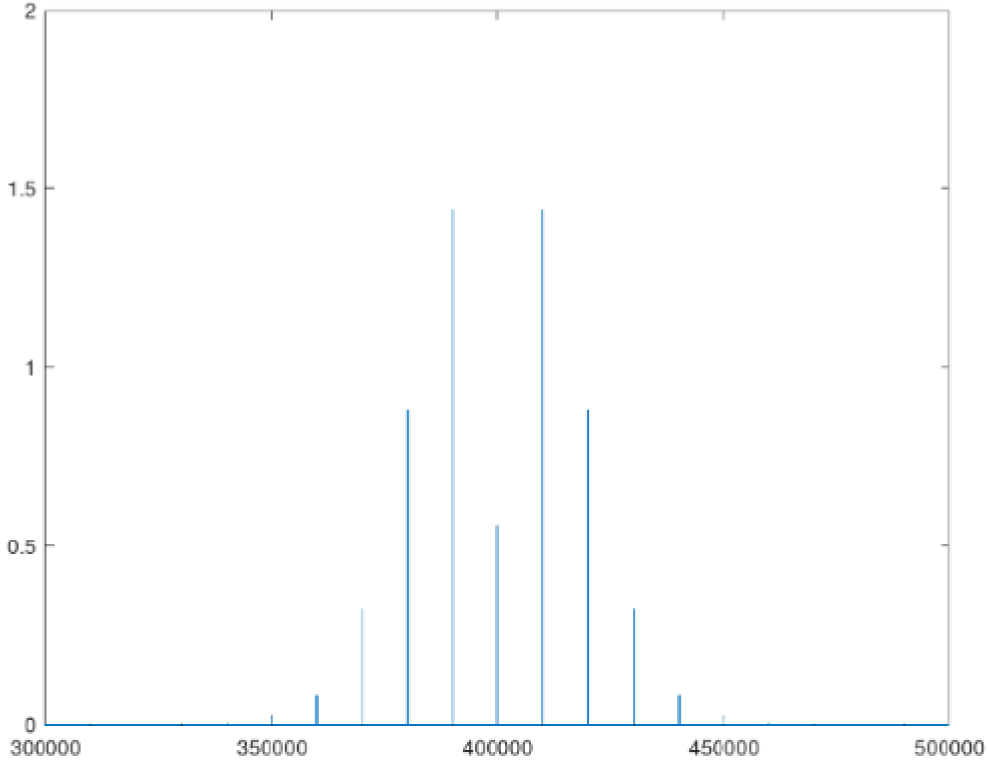
Encontramos f_m e Δf

$$f_m = \frac{\omega_m}{2\pi} = \frac{10000\pi}{2\pi} = 5000$$
$$\Delta f = \frac{k_f}{2\pi} \cdot \frac{m_{max} - m_{min}}{2} = \frac{4000\pi}{2\pi} \cdot \frac{5 - (-5)}{2} = 2000 \cdot 5 = 10000$$

Então β será:

$$\beta = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{10000}{5000} = 2$$

Espectro do sinal FM



*OBS: Lembrar que a transformada de Fourrier de cosseno a amplitude fica 0.5 pra cada lado! Então na hora que for pegar a tabela multiplicar os valores por Amplitude/2

Exercício para casa

Uma portadora cossenoidal, definida pela equação $S(t) = 10\cos(2\pi f_0 t)$, com $f_0 = 10$ MHz, é modulada em frequência por um sinal $x(t) = 10\cos(2\pi f_m t)$, com $f_m = 10$ KHz. Considerando o índice de modulação $\beta = 1$, determine.

a) O desvio de frequência do sinal modulado.

b) Represente graficamente o espectro do sinal FM

n/β	0.1	0.2	0.5	1.0	2.0
0	0.998	0.990	0.938	0.765	0.224
1	0.05	0.100	0.242	0.440	0.577
2	-	0.005	0.0031	0.115	0.353
3	-	-	-	0.02	0.129
4	-	-	-	0.002	0.034
5	-	-	-	-	0.007

Aplicações da Modulação FM

- FM - Faixa estreita:
  - Comunicação em serviços públicos (bombeiros, polícia);
  - Radioamador
- FM - Faixa Larga:
  - Áudio de TV analógica;
  - Comunicações ponto a ponto;
  - Radiodifusão comercial (88MHz – 108MHz)