MAT0164 - Números Inteiros: uma introdução à matemática

Lista 2

Conjuntos e Funções

1º Semestre de 2023

(1) Prove ou apresente um contraexemplo, onde A, B e C são conjuntos.

(a) $A \subseteq C$ e $A \subseteq B \Rightarrow A \subseteq B \cup C$.

(b) $(A \cap B) \cup (A - B) = A$.

(c) $A \cap (B - C) = A \cap B - A \cap C$.

(d) $A \cup (B - C) = A \cup B - A \cup C$.

(e) $(A \times B) \cup (C \times D) = (A \cup C) \times (B \cup D)$

(f) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

(2) A *diferença simétrica* de dois conjuntos A e B, denotada por $A \triangle B$, é definida como sendo o conjunto

$$(A \cup B) - (A \cap B).$$

(a) Prove que esse conjunto é igual ao conjunto $(A - B) \cup (B - A) = \{x \in A \cup B : x \notin A \cap B\}$

(b) Prove que $A \triangle B = B \triangle A$ para todos conjuntos A e B, ou seja, a diferença simétrica é uma operação comutativa.

(c) Prove que $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$ para todos conjuntos A, B e C, ou seja, a diferença simétrica é uma operação associativa.

(3) Sejam A, B e C conjuntos. Determine (e prove) uma condição necessária e suficiente para que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

(4) Dados dois conjuntos A e B, prove que se $B \subseteq A$ então $A - (A - B) = B$. Mostre com um exemplo que a igualdade pode não valer se omitirmos a condição $B \subseteq A$.

(5) Seja $f : X \to Y$ uma função. Dado $A \subseteq X$, definimos a imagem de A por f, designada por $f(A)$, como sendo

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} = \{y \in Y | \exists x \in A \wedge y = f(x)\}$$

Prove que, para $A_0, A_1 \subseteq X, B_0, B_1 \subseteq Y$:

(a) $A_0 \subseteq A_1 \Rightarrow f(A_0) \subseteq f(A_1)$.

(b) $f(A_0 \cup A_1) = f(A_0) \cup f(A_1)$.

(c) $f(A_0 \cap A_1) \subseteq f(A_0) \cap f(A_1)$. Mostre com um exemplo que a igualdade pode não valer.

(d) $f(A_0 \setminus A_1) \supseteq f(A_0) \setminus f(A_1)$. Mostre que a igualdade pode não valer.

(6) Seja $f\colon X \to Y$ uma função. Dado $B \subseteq Y$, definimos a imagem inversa de B por f, designada por $f^{-1}(B)$, como
$$f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$$
Em particular, $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.
Prove que, para $A_0, A_1 \subseteq X, B_0, B_1 \subseteq Y$:

(a) $B_0 \subseteq B_1 \Rightarrow f^{-1}(B_0) \subseteq f^{-1}(B_1)$.

(b) $f^{-1}(B_0 \cup B_1) = f^{-1}(B_0) \cup f^{-1}(B_1)$.

(c) $f^{-1}(B_0 \cap B_1) = f^{-1}(B_0) \cap f^{-1}(B_1)$.

(d) $f^{-1}(Y \setminus B_0) = X \setminus f^{-1}(B_0)$.

(7) Dada uma função $f\colon A \to B$, dizemos que

(α) f é **injetora** se
$$(\forall x_1, x_2 \in A)(x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2))$$
ou, equivalentemente, se $(\forall x_1, x_2 \in A)(f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2)$.

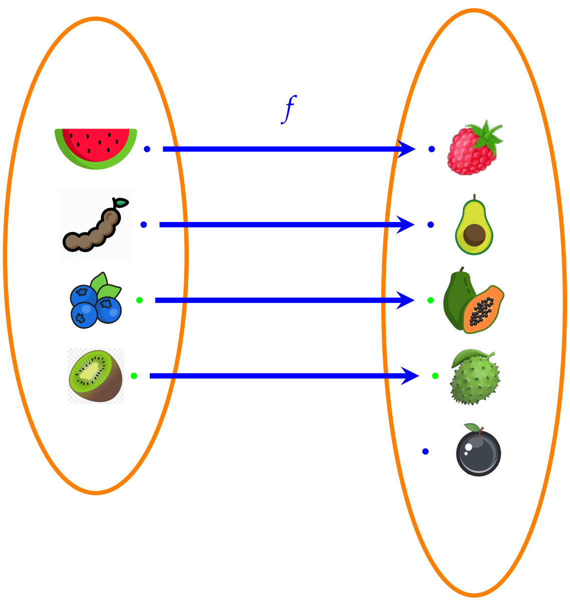
(β) f é **sobrejetora** se $\mathrm{im} f = B$, isto é:
$$(\forall y \in B)(\exists x \in A : f(x) = y).$$

(γ) f é **bijetora** se é injetora e sobrejetora.

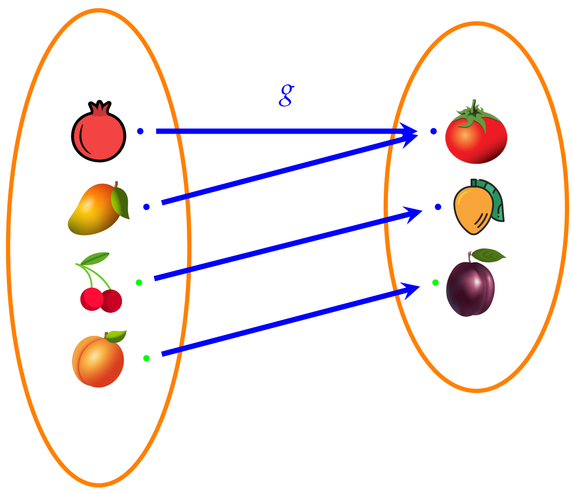
Se $f\colon A \to B$ é bijetora, podemos definir a função inversa de f, que designamos por f^{-1}. Temos que $f^{-1}\colon B \to A$ se caracteriza pela seguinte condição:
$$(\forall b \in B, \forall a \in A)\left(f^{-1}(b) = a \leftrightarrow f(a) = b\right).$$

Indique qual das funções abaixo é injetora, sobrejetora ou bijetora.

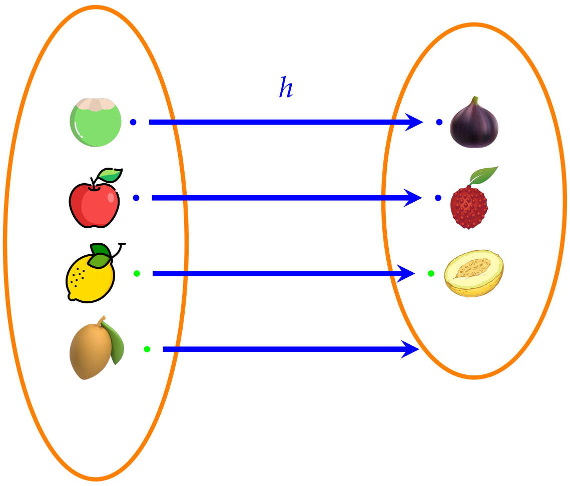
(a)



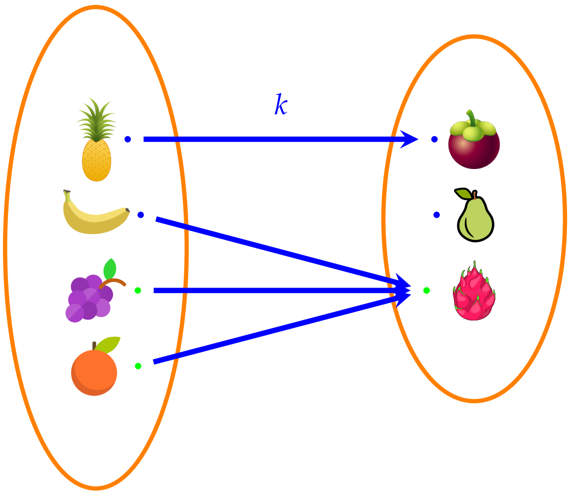
(b)



(*c*)



(*d*)



(8) Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ funções. Prove que

(*a*) Se f e g são injetoras, então $g \circ f$ é injetora;

(*b*) Se $g \circ f$ é injetora, então f é injetora;

(*c*) Se $g \circ f$ é injetora e f é sobrejetora, então g é injetora.

(9) Sejam $f\colon X \to Y$ e $g\colon Y \to Z$ funções. Prove que

(*a*) Se f e g são sobrejetoras, então $g \circ f$ é sobrejetora;

(*b*) Se $g \circ f$ é sobrejetora, então g é sobrejetora;

(*c*) Se $g \circ f$ é sobrejetora e g é injetora, então f é sobrejetora.

(10) Seja $f : X \to Y$ uma função. Prove que

(*a*) f é sobrejetora se, e somente se, para todo $B \subseteq Y$, $f(f^{-1}(B)) = B$;

(*b*) f é injetora se, e somente se, para todo $A \subseteq X$, $f^{-1}(f(A)) = A$.

(11) Escreva explicitamente o conjunto $\mathcal{P}(X)$, para cada conjunto X :

(*a*) $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ (*b*) $X = \{3, \{1, 4\}\}$ (*c*) $X = \{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$

(*d*) $X = \mathcal{P}(\{a\})$ (*e*) $X = \mathcal{P}(\{a, b\})$

(12) Dados dos conjuntos A e B quaisquer, mostre que

(*a*) $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$ (*b*) $\wp(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.

Dê um contra-exemplo para $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \supseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Que condição é necessária e suficiente para que se verifique a igualdade?