Lista 01 de MAP 3210
BMA - BMAC IME USP
1° Semestre de 2023

Na resolução desta lista podem usar-se *ferramentas computacionais*.
Justifique suas afirmações ou suas conclusões.
A definição a seguir será usada na lista.

Definição 1 *Uma função $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}$ diz–se* solução não prolongável *do problema de Cauchy $\dot{x} = f(t,x),\ x(t_0) = x_0$, se, por definição:*

(i) φ for solução desse problema

(ii) Se $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ for uma solução desse problema então $V \subset U$ e $\psi = \varphi|_V$.

Questão 1 Considere $g(x) = x^2$ definida em $(0, +\infty)$ e $x_0 > 0$.
Determine a solução não prolongável do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

Chame $D(x_0)$ ao domínio dessa solução não prolongável.
Existe algum $x_0 > 0$ para o qual $D(x_0) = \mathbb{R}$?
O que acontece com $D(x_0)$ ao fazer $x_0 \to 0$?

Questão 2 Refaça o problema anterior com a função $g(x) = x^2$ definida agora em $(-\infty, 0)$ e $x_0 < 0$.

Questão 3 Considere $f(x) = x^2$ definida em toda reta real, tome $x_0 \in \mathbb{R}$ e decida se o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

tem uma única solução não prolongável.
Obs. Note que $f(x)$ anula-se em $x = 0$, portanto não pode ser aplicado, ao menos de modo direto, o resultado de existência e unicidade visto em sala para equações de variáveis separadas *boazinhas*, mas neste caso. . . .

Questão 4 Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $f(kt, kx) = f(t,x)$, para todos $(t,x) \in \Omega$ e todo $k > 0$.

(i) Prove que a mudança de variáveis $yt = x$ (ou seja, $y = \frac{x}{t}$) transforma a e.d.o. $\dot{x} = f(t,x)$ em uma e.d.o. do tipo $\dot{y} = G(t)F(y)$.

(ii) Encontre a solução geral de $\dot{x} = -\frac{t}{x}$.

(iii) Encontre a solução geral de $\dot{x} = 1 + \frac{x}{t}$.

Questão 5 Ache a solução não prolongável do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = x \tan t + \sin t, x \in \mathbb{R}, \ t \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

com $(t_0, x_0) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$.

Questão 6 Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \ f(t,x) = t^2(x^2+1)$, tome $x_0 \in \mathbb{R}$ e considere o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (*)$$

(i) Determine a solução não prolongável de $(*)$ (não se esqueça de discutir o qual o domínio dessa solução).

(ii) Denote por $D(x_0)$ o domínio da solução não prolongável de $(*)$ e determine o conjunto $A = \{x_0 \in \mathbb{R} : 1 \in D(x_0)\}$. Mostre que $0 \in A$.

(iii) Chame φ_0 à solução não prolongável de $(*)$ com $x_0 = 0$, e aplique o método de Euler com $h = \frac{1}{10}$ para encontrar uma aproximação de $\varphi_0(1)$.

(iv) Repita o item anterior com $h = 0.01$.

(v) Considere $n \in \mathbb{N}$, tome $x_0 = 0, \ t_0 = 0, \ h_n = \frac{1}{n}$ e, para $j = 1, 2, \ldots, n$, faça $t_j = t_{j-1} + h_n$ e

$$x_j = x_{j-1} + f(t_{j-1}, x_{j-1})h_n + \left(\frac{\partial f}{\partial t}(t_{j-1}, x_{j-1}) + \frac{\partial f}{\partial x}(t_{j-1}, x_{j-1}) f(t_{j-1}, x_{j-1})\right) \frac{h_n^2}{2}.$$

Explique porque é esperado que x_n seja uma aproximação de $\varphi_0(1)$ melhor do que a encontrada pelo método de Euler com o mesmo h_n.

(vi) Use o método exposto no item anterior com $n = 10$ e $n = 100$ e obtenha as aproximações de $\varphi_0(1)$ correspondentes.

(vii) Compare as aproximações encontradas em (iii), (iv) e (vi) com o valor exato de $\varphi_0(1)$.

Questão 7 Sejam I e J intervalos abertos da reta, nenhum deles vazios, e funções $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ e $g : J \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que para todos os $t_0 \in \mathbb{R},\ x_0 \in I,\ y_0 \in J$, o problema de Cauchy no plano

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) \\ \dot{y} = yg(x) \\ x(t_0) = x_0,\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

tem uma única solução não prolongável.