Um pouco sobre Equações Diferencias Ordinárias

Este texto sobre equações diferenciais ordinárias, e em particular sobre equações lineares de primeira ordem, visa completar o que se viu em sala de aula, é mais extenso e tem, em um ou outro ponto, uma abordagem ligeiramente diferente. Porém os resultados obtidos são os mesmos

1 Introdução

Ao menos em termos históricos, a importância de equações diferenciais está, antes de tudo, nas aplicações. A pequena lista a seguir deve servir para justificar esta afirmação.

Exemplo 1 [Decaimento radiativo] Considere uma amostra de material radioativo e denote por $m(t)$ a quantidade de material radioativo no instante t. Segundo assegurm os *especialistas* a velocidade com que decai essa quantidade de material radioativo é diretamente proporcional a $m(t)$. Em termos matemáticos isso expressa-se como $\dot{m}(t) = -km(t)$, com k uma constante estritamente positiva.

Exemplo 2 [Lei de esfriamento de Newton] Segundo essa lei a temperatura de um corpo num meio termicamente isolado decresce com velocidade proporcional à diferença entre a sua temperatura e a do meio ambiente, colocando isso em termos matemáticos, se $T(t)$ é a temperatura do meio ambiente no instante t e $y(t)$ é a desconhecida temperatura no instante t de um corpo colocado nesse meio, então existe uma constante $k > 0$ tal que $\dot{y}(t) = -k(y(t) - T(t))$, ou de uma maneira mais usual no contexto de equações ordinárias, $\dot{y} = -k(y - T(t)) = -ky + kT(t)$.

Exemplo 3 [Equação fundamental da dinâmica] O cidadão conhecido na história como Sir Isaac Newton afirmou que se um ponto material de massa m desloca-se no espaço, sujeito a uma força F que depende do tempo t, da posição $r(t)$ e da velocidade $\dot{r}(t)$, a derivada da quantidade de movimento $Q(t) = m\dot{r}(t)$ é igual à força. Em termos matemáticos, $\frac{d}{dt}Q(t) = F(t, r(t), \dot{r}(t))$, ou seja, lembrando que a massa (na mecânica clássica) é constante, $m\ddot{r}(t) = F(t, r(t), \dot{r}(t))$, ou como é usual escrever $m\ddot{r} = F(t, r, \dot{r})$.

Exemplo 4 [Um modelo demográfico] Procurar modelos para o crescimento populacional é uma das questões mais antigas e atuais de estudos em demografia. Um dos modelos mais comuns é descrito pela chamada *equação logística.* Supõe-se que há uma constante M tal que a taxa de variação da população, $p(t)$ é proporcional a $M - p(t)$, ou seja, existe uma constante $\mu > 0$ tal que $\frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = \mu(M - p(t))$, ou escrevendo a equação na forma normal, $\dot{p} = \mu p(M - p) = -\mu p^2 + M\mu p$.

Exemplo 5 [Um exemplo de finanças] O sistema de juros, juros compostos claro, baseia-se na seguinte consideração, a taxa com que varia o capital devido é constante, digamos $\alpha > 0$. Se $c(t)$ é o capital devido no instante t, tem-se $\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \alpha$, isto é, $\dot{c} = \alpha c$.

Exemplo 6 [Um modelo para duas espécies] O modelo que aqui será descrito foi proposto há mais ou menos um século por Lotka e Volterra. Suponha que num planeta (originalmente era uma ilha) muito distante de uma galáxima mais distante ainda existam duas espécies, uma delas, X, cuja população no instante t será denotada por $x(t)$, alimenta-se de uma substância disponível em quantidade ilimitada naquele planeta (entendeu porque preferiu-se usar planeta em vez de ilha?)... Admita também que outra espécie, Y, cuja população no instante t será denotada por $y(t)$ alimenta-se apenas da espécie supramencionada! O modelo proposto por Lotka e Volterra para retratar matematicamente esta situação baseou-se no seguinte

[I] A taxa de crescimento de X é $\alpha - \beta y(t)$, para determinadas constantes α e β estritamente positivas. Isso quer dizer que, se não existir a espécie Y, a taxa de crescimento de X é constante (Malthus agradece), mas quanto maior for a população de Y menor é essa taxa, tornando-se negativa se $y(t)$ for maior do que $\frac{\alpha}{\beta}$.

[II] A taxa de crescimento de Y é, $-\gamma+\delta x(t)$, para convenientes constantes estritamente positivas γ e δ. Isso reflete os seguintes aspectos, se a única espécie que existe no tal planeta for Y isto é uma verdadeira tragédia, pois sem alimento a *taxa de mortalidade* será constante e igual a $\delta > 0$. Essa taxa de mortalidade será cada vez menor à medida que a população de X aumenta (Oba! Comida! Comida!), e torna–se uma *taxa de crescimento populacional positiva* quando $x(t) > \frac{\gamma}{\delta}$.

Em linguagem matemática tem–se

$$\begin{cases} \frac{\dot{x}(t)}{x(t)} = \alpha - \beta y(t) \\ \frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = -\gamma + \delta x(t) \end{cases}$$

ou, eliminando-se denominadores, na forma mais conhecida

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = -\gamma y + \delta xy. \end{cases}$$

Este é um exemplo de sistema de equações diferenciais, ou uma equação diferencial em $\mathbb{R}^2$.

Poder–se–ia aumentar esta lista, mas para os objetivos propostos já chega!

Agora vai–se fazer uma pequena introdução formal ao estudo de equações ordinárias (e.d.o.)

Aqui não se tentará defiir o que é uma e.d.o., falta linguagem e, principalmente, falta um motivo para isso.

Seja $A \subset \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado e $f : A \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, uma *e.d.o. escalar normal de primeira ordem*, será escrita como

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{1}$$

Os exemplos 1, 2, 4 e 5 vistos antes são exemplos de e.d.o. normal de primeira ordem.

Definição 1 *Uma função $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma solução de* (1) *se:*

[a] *I é um intervalo não degenerado contido em A.*

[b] *$\dot{\varphi}(t) = f(t, \varphi(t))$, para todo $t \in I$.*

Observação 1 *Segue da definição 1 que toda solução de e.d.o. é, pelo menos, contínua. Ademais, se f for contínua, então as soluções de* (1) *são de classe $\mathcal{C}^1$.*

Note que o domínio de toda solução de e.d.o. deve ser um intervalo, essa condição será fundamental para questões de unicidade de soluções para problemas de valor inicial em e.d.o.

Exemplo 7 As funções $\varphi_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ j = 1, 2,$ dadas por $\varphi_1(t) = 0$, para todo t, e $\varphi_2(t) = \begin{cases} (\frac{2t}{3})^{\frac{3}{2}},\ t \geq 0 \\ 0,\ t < 0 \end{cases}$, são ambas soluções da e.d.o. $\dot{x} = \sqrt[3]{x}$.

Questão 1 Prove que φ_2 é solução de $\dot{x} = \sqrt[3]{x}$.

Questão 2 Prove que $\varphi :] - \infty, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(t) = \frac{1}{1-t}$ é uma solução de $\dot{x} = x^2$. (Note que aqui $f(t, x) = x^2$ está definida em toda reta, mas φ é uma solução desta e.d.o. que está definida em $] - \infty, 1[$ e tem uma assíntota vertical em $x = 1$, logo não pode ser estendida para uma solução definida em $\mathbb{R}$.)

Estes inocente exercícios terão sua importância em breve.

Exemplo 8 Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto não vazio e considere $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e a e.d.o. $\dot{x} = f(t)$. Vão-se procurar soluções desta e.d.o. definidas em todo intervalo I.

O teorema fundamental do cálculo mostra que $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma solução desta equação definida no intervalo I se, e apenas se, φ é uma primitiva de f.

Assim, tomando $t_0 \in I$, o conjunto $\mathfrak{S}$ das soluções de $\dot{x} = f(t)$ definidas em I é

$$\left\{ \varphi : I \longrightarrow \mathbb{R},\ \varphi(t) = \int_{t_0}^{t} f(u)du + c \right\},\ c \in \mathbb{R}$$

Questão 3 Prove a afirmação anterior.

Isso mostra que a equação diferencial ordinária $\dot{x} = f(t)$ tem infinitas soluções, porém se for feita a exigência adicional de que a solução desta e.d.o. no ponto t_0 tenha o valor x_0 o que acontece? É simples deduzir do que se afirmou antes que a única função definida em I que satisfaz esas duas condições (resolver a e.d.o. e valer x_0 em t_0) é $\psi(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(s)ds, \; t \in I$.

A exigência adicional que, neste caso, garantiu a *unicidade* da solução chama-se **Condição Inicial** e o problema "e.d.o.+condição inicial" chama-se problema de Cauchy ou problema de valor inicial, e representa–se assim:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Em geral, considere $A \subset \mathbb{R}$ é um intervalo e $f : A \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se $t_0 \in A$, chama–se probema de Cauchy, ou problema de valor inicial, à questão de encontrar a(s) solução(ões) da e.d.o. $\dot{x} = f(t,x)$ que no ponto t_0 vale x_0, e representa-se esse problema por

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{2}$$

O exemplo 8 exibe um problema de Cauchy com apenas uma solução definida em I, entretanto o exemplo 7 mostra que o problema $\dot{x} = \sqrt[3]{x}, \; x(0) = 0$ tem pelo menos duas soluções diferentes definidas em $\mathbb{R}$.

Isso mostra que exigir continuidade de f não basta para garantir que o problema (2) tenha solução "única".

Nas seções 2 e 3 serão vistas classes de equações diferenciais ordinárias para as quais o problema de Cauchy correspondente têm solução única, na verdade pode–se enunciar um resultado bem mais geral do que o demonstrado ali, um resultado que é conhecido como Teorema de Existência e Unicidade.

2 Equações de variáveis separadas

Considere I e J intervalos abertos não degenerados de $\mathbb{R}$ e suponha que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ e $g : J \longleftarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas com $g(x) \neq 0$, para todo $x \in J$.

A equação diferencial

$$\dot{x} = g(x)f(t) \tag{3}$$

é chamada equação de variáveis separadas.

Como g nunca toma o valor zero, essa equação pode ser escrita como $\frac{\dot{x}}{g(x)} = f(t)$ e, em termos de formas diferenciáveis (seja lá o for isso) toma a forma $\frac{dx}{g(x)} = f(t)dt$ que mostra a razão dessa nomenclatura.

Para procurar uma solução desta equação considere $G : J \longrightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de $\frac{1}{g(x)}$ e note que:

(i) Como g é uma função contínua que nunca se anula e $G'(x) = \frac{1}{g(x)} \neq 0$ para todo x, portanto G é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ inversível, de fato G é estritamente crescente se g é positiva e estritamente decrescente se g é negativa.

(ii) Assim, $J_1 = G(J)$ é um intervalo aberto da reta, não degenerado, e como $G'(x) \neq 0$, para todo $x \in J$, sua inversa $G^{-1} : J_1 \longrightarrow J$ é também de classe $\mathcal{C}^1$ e

$$\frac{d}{dy}G^{-1}(y)\bigg|_{y=G(x)} = \frac{1}{G'(x)} = g(x).$$

Agora note que, se $x(t)$ é uma solução de (3) definida no intervalo I_1, então, para todo $t \in I_1$ tem–se $(t, x(t)) \in I \times J$, portanto $I_1 \subset I$ e $x(t) \in J$. Isso mostra que fica bem definida a função composta $G \circ x$ em I_1 e, pela regra da cadeia, se $t \in I_1$, tem–se

$$\tfrac{d}{dt}G(x(t)) = G'(x(t))\dot{x}(t) = \tfrac{1}{g(x(t))}g(x(t))f(t) = f(t).$$

Portanto, se $F(t)$ é uma primitiva de $f(t)$ em I_1, pelo teorema fundamental do cálculo, tem-se que existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que, $G(x(t)) = F(t) + c$ para todo $t \in I_1$. Ou seja $x(t) = G^{-1}(F(t) + c)$.

Agora use o item (ii) das observações anteriores e veja que, se $F(t)$ é uma primitiva de $f(t)$ no intervalo $I_1 \subset I$ e c é um número real tal que $F(t)+c \in J_1$, para todo $t \in I_1$, então $x(t) = G^{-1}(F(t)+c)$ de fato é solução da e.d.o. considerada.

Isso fornece todas as soluções de (3) a partir de uma primitiva qualquer de $\frac{1}{g(x)}$ e outra de $f(t)$, como será visto a seguir, a constante c envolvida será determinada a partir das particulares primitivas consideradas e de uma condição inicial.

Considere $t_0 \in I,\ x_0 \in J$ e o problema de condição inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = g(x)f(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{4}$$

para estudar esse problema vão–se tomar $G(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \frac{1}{g(u)}du$, $F(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f(u)du$ e procurar $c \in \mathbb{R}$ tal que $x(t) = G^{-1}(F(t) + c)$ resolva esse problema.

Já foi estabelecido que $G^{-1}(F(t)+c)$ é solução da equação diferencial envolvida, então resta verificar a condição inicial $x(t_0) = x_0$, veja que $F(t_0) = 0$ e $G(x_0) = 0$, assim $G^{-1}(0) = x_0$.

Então $x(t_0) = x_0$ se, e apenas se, $x_0 = x(t_0) = G^{-1}(c)$, ou seja $c = 0$.

Resta uma última questão a considerar... qual o domínio em que pode-se definir a solução do problema de Cauchy (4).

Para isto lembre que G é uma função contínua, inversível, definida no intervalo aberto não degenerado J, portanto sua imagem é um intervalo aberto não degenerado, que foi denotado por J_1, note ainda que, como $G(x_0) = 0$, então $0 \in J_1$.

A função F está definida no intervalo não degenerado I e $t_0 \in I$ com $F(t_0) = 0$, assim a imagem de F é um intervalo $\widetilde{I}$ ao qual zero pertence (aqui pode acontecer que a imagem de F seja $\{0\}$ ou que 0 seja uma extremidade de $\widetilde{I}$, isso não causará problemas).

Como $0 \in J_1$ e J_1 é aberto, o conjunto $W = \{y \in J_1 : G(y) \in \widetilde{I}\}$ é um intervalo não aberto não degenerado (demonstre como exercício). É imediato ver que uma solução de (4) tem de estar definida em um intervalo $L \subset W$, com $0 \in L$.

Exemplo 9 Considere a e.d.o $\dot{x} = t(1 + x^2)$, $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Determinar a solução geral dessa equação e estudar o problema de Cauchy $\dot{x} = t(1 + x^2), x(0) = 1$.

Trata-se de uma equação de variáveis separadas com $f(t) = t$ e $g(x) = 1+x^2$.

Para determinar a solução geral dessa e.d.o. considere as primitivas de $f(t)$ e $\frac{1}{g(x)}$ definidas respectivamente como por $F(t) = \int\limits_{0}^{t} udu = \frac{t^2}{2}$ e $G(x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{1+u^2}du = \arctan(x)$. Claro que $G^{-1}(x) = \tan x,\ x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Então as soluções de $\dot{x} = t(1+x^2)$ são as funções $x(t) = \tan(\frac{t^2}{2}+c),\ c \in \mathbb{R}$.

Dessa forma, se $x(t)$ resolve o problema de Cauchy proposto então $x(0) = 1$, ou seja deve-se ter $1 = \tan(c)$, como $c \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, então $c = \frac{\pi}{4}$. Então, $x(t) = \tan(\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{4})$.

Para determinar os possíveis intervalos I em que pode-se definir $x(t)$, mais uma vez note que G^{-1} está definida em $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, portanto deve-se ter $\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{4} \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ou seja $\frac{t^2}{2} + \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$, i.e. $-\sqrt{\frac{\pi}{2}} < t < \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Portanto uma solução de $\dot{x} = t(1 + x^2), x(0) = 1$ deve estar definida em um intervalo I_1 que contenha 0 e esteja contido em $I_0 = (-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}})$.

Isso mostra que o *maior* intervalo em que é possível definir uma solução do problema de Cauchy apresentado é I_0.

Exercício 1 *Considere $x_0 \in \mathbb{R}$ e o problema $\dot{x} = t(1 + x^2), x(0) = x_0$.*

Determine a solução desse problema que está definida no "maior intervalo possível".

Diálogo sugestivo:

- (Um estudante) "Professor, isso aí, "maior intervalo possível", está bem definido?

-(O professor): Sei lá, como diria Pessoa, *a pergunta não precisa ser precisa, o que precisa ser precisa é a resposta...*

3 Equação linear escalar de primera ordem

A equação que será estudada agora é, dadas funções contínuas $a : J \longrightarrow \mathbb{R}$ e $b : J \longrightarrow \mathbb{R}$, em que J é um intervalo não degenerado,

$$\dot{x} = a(t)x + b(t). \tag{5}$$

Relacionada a esta equação, chamada e.d.o. escalar linear de primeira ordem é

$$\dot{x} = a(t)x, \tag{6}$$

chamada equação homogênea associada a (5).

Note que os exemplos 1, 2 e 5 são de e.d.o. lineares, com a primeira e a última delas homogêneas.

Após provar dois resultados bastante gerais sobre equações lineares (equações com *cara parecida* a (5)) será estudado primeiro o caso da equção homogênea, depois será analisado o caso geral, destacando a importância da relação entre o caso homogêneo e o não homogêneo.

Fato 1 *Suponha que $I \subset J$ é um intervalo não degenerado e que, para $k = 1, 2$, $\varphi_k : I \longrightarrow \mathbb{R}$ seja solução da equação homogênea (6). Então $\varphi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ é solução de (6), quaisquer que sejam os reais c_1 e c_2.*

Demonstração: Basta usar que $\frac{d}{dt}(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1\dot{\varphi}_1 + c_2\dot{\varphi}_2$. ∎

Fato 2 *Sejam $\mathfrak{S}(I)$ e $\mathfrak{S}_0(I)$ respectivamente, o conjunto das soluções de (5) e o conjunto das soluções de (6), definidas no intervalo não degenerado I, então:*

[a] *Se* $\varphi_k \in \mathfrak{S}(I)$*, para* $k = 1, 2$*, tem–se que* $\varphi_1 - \varphi_2$ *é solução de* (6)*;*

[b] *Seja* $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma solução da equação* (5)*. Então*

$$\mathfrak{S}(I) = \{\psi + \varphi_0 : \varphi_0 \in \mathfrak{S}_0(I)\}.$$

Demonstração: A parte [a] segue diretamente de $\frac{d}{dt}(\varphi_1 - \varphi_2) = \dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2$.

Para demonstrar [b] deve provar-se que:

- Toda solução da equação não homogênea (5) definida em I é da forma $\psi + \varphi_0$, em que φ_0 é uma solução de (6);
- Reciprocamente, mostrar que, se $\varphi \in \mathfrak{S}_0(I)$, então $\psi + \varphi \in \mathfrak{S}(I)$.

A primeira afirmação decorre imediatamente de [a] uma vez que se $\widetilde{\psi} \in \mathfrak{S}(I)$ então, por [a], $\varphi_0 = \widetilde{\psi} - \psi \in \mathfrak{S}_0(I)$, logo $\widetilde{\psi} = \psi + \varphi_0$.

Por outro lado, se $\varphi \in \mathfrak{S}_0(I)$ e $\psi \in \mathfrak{S}(I)$, vem $\dot{\psi}(t) = a(t)\psi(t) + b(t)$ e $\dot{\varphi}(t) = a(t)\varphi(t)$, assim $\frac{d}{dt}(\psi + \varphi)(t) = a(t)(\psi + \varphi)(t) + b(t)$ e portanto $\psi + \varphi \in \mathfrak{S}_0(I)$. ∎

O fato 2 é de importância fundamental, ele aparecerá muitas vezes, sempre realcionando equações lineares homogêneas e não homogêneas, extirpando esse resultado das desnecessárias complicações de notação, o fato 2 afirma que:

1. A diferença de soluções da equação não homogênea é uma solução da equação homogênea associada.
2. A solução geral da equação não homogênea é a soma de uma solução particular da equação não homogênea com a solução geral da equação homogênea associada.

Uma primeira conseqüência deste resultado, muito útil (e não só em e.d.o.) é objeto do próximo exercício.

Questão 4 Suponha que $t_0 \in J$ (o domínio de a e de b) e que a única solução definida em I do problema

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)x \\ x(t_0) = 0 \end{cases} \tag{7}$$

seja a função identicamente nula.

Demonstre que, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$, o problema

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{8}$$

tem, no máximo, uma solução

Observação 2 *É irrelevante aqui que o resultado do exercício anterior possa ser demonstrado diretamente, como será feito quase a seguir. Esse exercício nada tem a ver com equações diferencias diretamente, ele tem a ver muito com estruturas lineares, aquelas estudadas em álgebra linear. O exercício a seguir ten como único objetivo reforçar este ponto.*

Questão 5 Sejam A uma matriz de coeficientes reais e ordem $p \times q$ e b uma matriz também real de ordem $p \times 1$. Considere a equação linear $Ax = b$, ou seja procuram-se a(s) matriz(es) reais $q \times 1$ tal(is) que $Ax = b$. Se O é a matriz nula de ordem $p \times 1$, a equação $Ax = O$ chama-se *equação homogênea associada* a $Ax = b$.

1. Prove que se $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}$ e $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_q \end{bmatrix}$ são soluções de $Ax = O$, então $\alpha y + \beta z$ é solução de $Ax = O$, para todos os reais α e β.

2. Provar que se $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}$ e $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_q \end{bmatrix}$ são soluções de $Ax = b$ então $w = y - z$ é solução de $Ax = O$.

3. Sejam $\mathfrak{V}$ o conjunto de todas as soluções de $Ax = b$ e $\mathfrak{V}_0$ o conjunto de todas as soluções de $Ax = O$. Prove que, se z é uma solução de $Ax = b$, então

$$\mathfrak{V} = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_q \end{bmatrix} : x = z + w,\ w \in \mathfrak{V}_0 \right\}.$$

4. Prove que, se a equação homogênea associada $Ax = O$ tem como única solução a matriz nula, então a equação $Ax = b$ tem, no máximo, uma solução (há efetivamente casos em que esta última equação tem uma única solução e há casos em que $Ax = b$ não tem nenhuma solução).

3.1 A equação linear homogênea

Considere a equação homogênea

$$\dot{x} = a(t)x, \tag{6}$$

com $a : J \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua dada.

No caso em que $a(t)$ é constante, a solução geral desta equação é bem conhecida, $\varphi(t) = ce^{at}$, com $c \in \mathbb{R}$, isto sugere a procura de soluções de (6) do tipo $\psi(t) = ce^{g(t)}$, será que existem soluções assim? Se existirem, deve–se ter $\dot{\psi}(t) = c\dot{g}(t)e^{g(t)} = a(t)\psi(t) = ca(t)e^{g(t)}$. Ou seja, $\psi(t)$ é solução de (6) se, e só se, $\dot{g}(t) = a(t)$. Agora é pouco provável que o resultado enunciado a seguir vá surpreender alguém.

Fato 3 *Sejam $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo não degenerado e $a : J \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então se $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma solução de $\dot{x} = a(t)t$ e $A : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma primitiva de $a(t)$, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(t) = ce^{A(t)}$.*

Demonstração: Seja $\psi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma solução de $\dot{x} = a(t)x$ e considere $A : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de $a(t)$ no intervalo não degenerado I.

Defina para $t \in I$, $h(t) = e^{-A(t)}\psi(t)$, derivando h obtém–se $\dot{h}(t) = e^{A(t)}(a(t) - \dot{A}(t)) = 0$, para todo $t \in I$ e, portanto $h(t) \equiv c$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Assim, $\psi(t) = ce^{A(t)}$. ∎

Um ponto a ser destacado aqui é o fato que $A(t)$ é uma primitiva *qualquer* de $a(t)$, e se for escolhida outra primitiva $F(t)$ desta função? Bem, como I é um intervalo (olha aí, de novo esta propriedade aparece) então existe uma constante $\widetilde{c}$ tal que $F(t) = A(t) + \widetilde{c}$, logo $\psi(t) = ce^{A(t)} = ce^{F(t)-\widetilde{c}} = ce^{-\widetilde{c}}e^{F(t)}$, ou seja, ao mudar–se a primitiva de $a(t)$ muda–se também a constante envolvida e tudo se passa como se nada se passa–se!

Corolário 1 *Sejam $a : J \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua, $t_0 \in J$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Então, se I é um intervalo não degenerado com $t_0 \in I$, a única solução definida em I do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)x \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

é $\varphi(t) = x_0 e^{(\int_{t_0}^{t} a(s)ds)}$, $t \in I$.

Questão 6 Demonstre o corolário 1.

Corolário 2 *Sejam $a : J \longrightarrow \mathbb{R}$ e $b : J \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas, $t_0 \in J$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Então, se I é um intervalo não degenerado com $t_0 \in I$, existe no máximo uma solução definida em I do problema de Cauchy*

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)x + b(t) \\ y(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Demonstração: Pelo corolário 1 a única solução de $\dot{x} = a(t)x,\ x(t_0) = 0$ definida em I é a função identicamente nula.

Assim, se ψ_1 e ψ_2 são soluções do problema considerado no enunciado, então $\varphi = \psi_1 - \psi_2$ resolve $\dot{x} = a(t)x,\ x(t_0) = 0$, portanto tem-se $\varphi(t) \equiv 0$. ∎

3.2 A equação linear de primeira oredem não homogênea

Agora estuda–se a e.d.o. $\dot{x} = a(t)x + b(t)$, em que a e b são funções contínuas do intervalo não degenerado J em $\mathbb{R}$.

Em vista do que se viu na subseção anterior vão–se procurar soluções definidas num intervalo I do tipo $\psi(t) = c(t)e^{A(t)}$, em que $A(t)$ é uma primitiva de $a(t)$ em I.

Um cálculo imediato mostra que $\dot{\psi}(t) = e^{A(t)}[\dot{c}(t) + c(t)\dot{A}(t)] = e^{A(t)}[\dot{c}(t) + c(t)a(t)]$, assim $\psi(t)$ resolve a equação diferencial (5) se, e só se, $e^{A(t)}[\dot{c}(t) + c(t)a(t)] = a(t)c(t)e^{A(t)} + b(t)$, ou seja $\dot{c}(t) = e^{-A(t)}b(t)$.

A partir desta observação é natural considerar $A(t)$ uma primitiva de $a(t)$ em J e $g(t) = e^{-A(t)}b(t),\ x \in J$. Considere também $G(t)$ uma primitiva de $g(t)$.

Tem–se então que, se $I \subset J$ é um intervalo não degenerado, há a solução de (5) $\psi(t) = G(t)e^{A(t)},\ x \in I$. Variando G e A tem–se *muitas* soluções dessa e.d.o.

Haverá outras? Para responder isso vai–se usar um método típico de e.d.o.

Pelo corolário 2 o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

tem uma única solução, então...

Fato 4 *Sejam $a(t)$ e $b(t)$ funções contínuas definidas no intervalo J, considere $x_0 \in J$ e $x_0 \in \mathbb{R}$ e I um intervalo não degeerado contido em J com $x_0 \in I$.*

Então, a única solução do problema

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

definida em I é

$$\psi(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s) e^{-\int_{t_0}^{s} a(u)du} ds \right) e^{\int_{t_0}^{t} a(s)ds}. \tag{9}$$

Demonstração: Claro que $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$ é uma primitiva de $a(t)$ em I e $G(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} b(s) e^{-\int_{t_0}^{s} a(u)du} ds$ é uma primitiva de $b(t)e^{-A(t)}$ no mesmo intervalo.

Assim, pela discussão feita poucas linhas antes do enunciado deste fato, $\psi(t)$ resolve $\dot{x} = a(t)x + b(t)$.

Por último um cálculo imediato mostra que $\psi(t_0) = x_0$. ∎

Agora fica fácil convencer-se que se $\widetilde{\psi} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma solução de $\dot{x} = a(t)x + b(t)$ então existem uma conveniente primitiva $A(t)$ de $a(t)$ em I e uma conveniente primitiva $G(t)$ de $g(t) = b(t)e^{-A(t)}$, tais que $\widetilde{\psi(t)} = G(t)e^{A(t)},\ x \in I.$

De fato, seja $\widetilde{\psi} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma solução de $\dot{x} = a(t)x + b(t)$. Tome um ponto $x_0 \in I$ e considere $x_0 = \widetilde{\psi}(x_0)$.

Dessa forma vê–se que $\widetilde{\psi}$ resolve em I o problema de Cauchy $\dot{x} = a(t)x + b(t),\ x(t_0) = x_0$. Então pelo fato 4, $\widetilde{\psi}(t) = G(t)e^{A(t)}$, em que $A(t)$ é a primitiva de $a(t)$ em I tal que $A(x_0) = 0$ e $G(t)$ é a primitiva de $b(t)e^{-A(t)}$ em I que satisfaz $G(x_0) = x_0$. Dessa forma vê–se que todas as soluções da e.d.o. escalar e linear de primeira ordem são desse *tipo*.

Antes de encerrar, uma pequena observação para povoar as fantasias e pesadelos dos mais afeitos a matemática...

É possível demosntrar que, se $a(t)$ e $b(t)$ são funções contínuas em J o problema

$$\begin{cases} \dot{x} = a(t)x + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

tem uma única solução definida em J, sem explicitar qual é essa solução, e sem fazer nenhuma menção à função exponencial (acredite, se puder!)

Fazendo isso, poder-se-ia definir $e^t,\ t \in \mathbb{R}$ como sendo a única solução definida em $\mathbb{R}$ do problema $\dot{x} = x,\ x(0) = 1$.