7. Movimento oscilatório

Forças constantes → força aplicada sobre o corpo que não varia com o tempo

Forças variáveis → força aplicada sobre o corpo que varia com o tempo

movimento repetido de um corpo no qual ele continua a retornar a uma posição após um intervalo de tempo

↓

depende de uma força restauradora

Forças restauradoras → sempre direcionada para a posição de equilíbrio

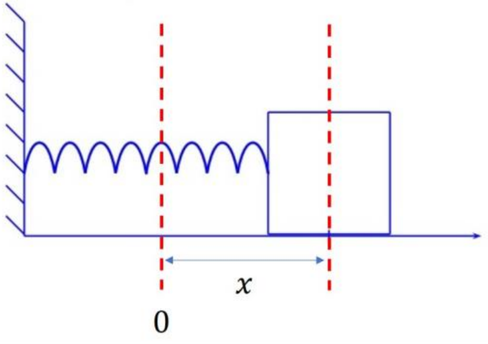
- ✓ oscilações de um corpo sobre a ação de uma mola
- ✓ movimento de um pêndulo
- ✓ vibrações de um instrumento musical de corda
- ✓ as moléculas em um sólido oscilam em torno de sua posição de equilíbrio
- ✓ ondas eletromagnéticas (luz, radar e rádio), são caracterizadas por vetores de campos elétricos e magnéticos oscilatórios
- ✓ circuitos de corrente alternada voltagem e corrente variam periodicamente com o tempo

todos esses exemplos são tipos especiais de movimento, chamado oscilatório

focaremos em um caso especial de movimento oscilatório periódico, chamado movimento harmônico simples (MHS)

7.1 Movimento harmônico simples (MHS)

Sistema massa-mola



Sistema composto de massa m sobre uma superfície horizontal sem atrito preso a uma mola ideal de constante elástica k

* Considerando que a única força que atua sobre o corpo é a força elástica $\rightarrow F = -kx$

então da 2ª Lei de Newton:

$$\rightarrow F = -kx \rightarrow ma = -kx \quad \rightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

$$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \boxed{\frac{k}{m}}x = 0 \qquad \rightarrow \boxed{\frac{k}{m} = \omega^2}$$

$\rightarrow$ frequência natural de oscilação do sistema

$$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad (1)$$

a equação 1 é uma equação diferencial ordinária linear de 2ª ordem, cuja solução geral é: $x(t) = a\cos(\omega t) + b\, sen(\omega t)$

onde $x(t) = sen(\omega t)$ ou $x(t) = cos(\omega t)$ são soluções

verificando para $x(t) = sen(\omega t)$, então $\frac{dx(t)}{dt} = \omega\cos(\omega t)$ e $\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\,\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t)$

substituindo na equação 1, teremos:

$$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \boxed{\rightarrow -\,\omega^2\,\mathrm{sen}(\omega t) + \omega^2 sen(\omega t) = 0}$$

então $x(t) = sen(\omega t)$ ou $x(t) = cos(\omega t)$ são soluções

prove para $x(t) = cos(\omega t)$

$x(t) = A\,cos(\omega t + \alpha)$ é possível solução, onde A, ω e α são constantes

vamos reescrever a equação $\rightarrow x(t) = A\,cos(\omega t + \alpha)$

$$\cos(A + B) = cosA\;cosB - senA\;senB$$

$$\rightarrow x(t) = A\,[cos(\omega t)\;cos\alpha - sen(\omega t)\;sen\alpha]$$

$$\rightarrow x(t) = A\,cos(\omega t)\;cos\alpha - A\,sen(\omega t)\;sen\alpha$$

$$\rightarrow x(t) = A\,cos\alpha\;cos(\omega t) - A\,sen\alpha\;sen(\omega t)$$

$$\boxed{A\,cos\alpha = a \text{ e } A\,sen\alpha = -b}$$

$$\rightarrow x(t) = a\,cos(\omega t) + b\,sen(\omega t)$$

a partir daqui utilizaremos a equação $x(t) = A\,cos(\omega t + \alpha)$ para definir o MHS

$$\rightarrow x(t) = A\,cos(\omega t + \alpha)$$

Período e frequência

Como o movimento é periódico, as posições se repetem depois de um tempo igual ao período T, ou seja:

$$\rightarrow x(t) = x\,(t + T)$$

$$\rightarrow x\,(t + T) = \mathrm{A}\cos\left[\omega(t + T) + \alpha\right]$$

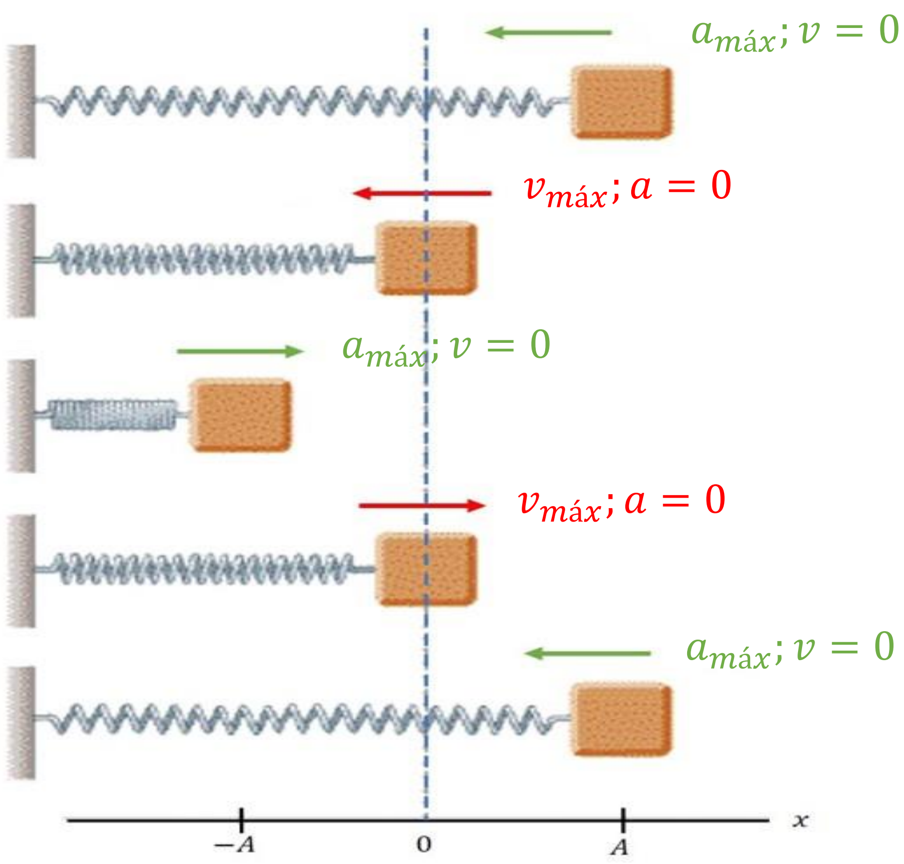
$$\rightarrow x\,(t + T) = \mathrm{A}\cos\left[\omega t + \omega T + \alpha\right]$$

$$\rightarrow x\,(t + T) = \mathrm{A}\cos\left[(\omega t + \alpha) + \omega T\right]$$ repetição $$\rightarrow \omega T = cte$$

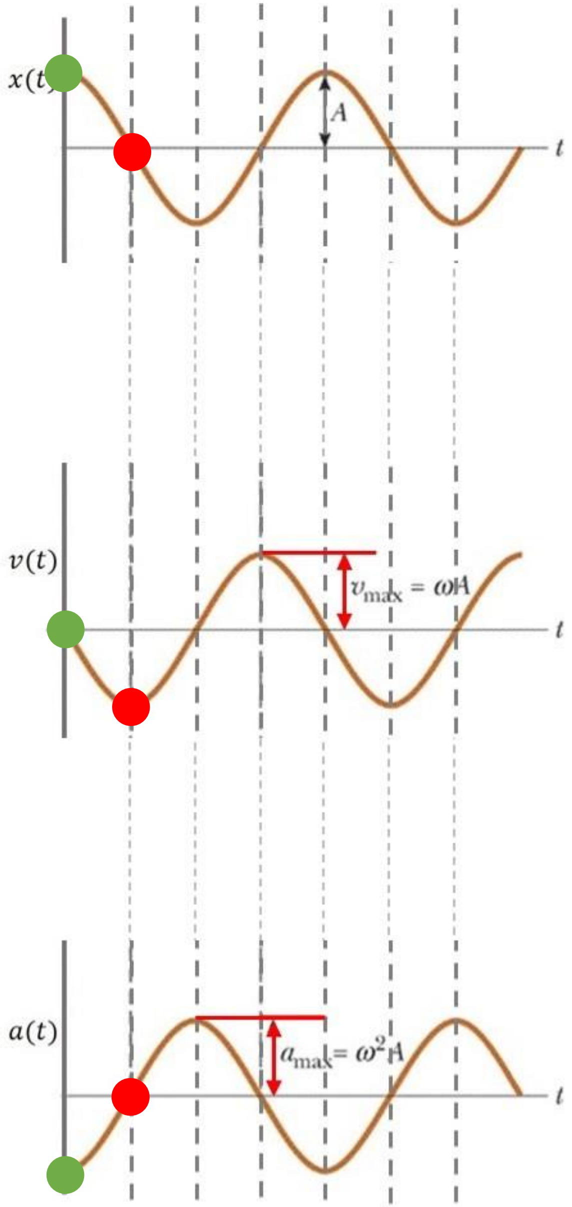
$$\rightarrow \omega T = 2\pi \quad \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \quad e \quad \omega = 2\pi f$$

Sistema massa – mola $\rightarrow \frac{k}{m} = \omega^2 \quad \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

Análise qualitativa de uma oscilação



Expressão gráfica do deslocamento, velocidade e aceleração em função do tempo para $\alpha = 0$



$\rightarrow x(t) = A \cos \omega t$

$qdo\ t = 0 \ \rightarrow \cos 0 = |1|$

$\rightarrow x = |x_{máx}| = A$

$\rightarrow v(t) = -\omega A \operatorname{sen} \omega t$

$qdo\ t = 0 \ \rightarrow \operatorname{sen} 0 = 0$

$\rightarrow v = 0$

$qdo\ x = 0 \ \rightarrow \cos \omega t = 0$

$logo\ sen\ \omega t = |1|$

$\rightarrow v = |v_{máx}| = |\omega A|$

$\rightarrow a(t) = -\,\omega^2 A \cos\ \omega t$

$qdo\ t = 0 \ \rightarrow \cos 0 = |1|$

$\rightarrow a = |a_{máx}| = |\omega^2 A|$

$qdo\ x = 0 \ \rightarrow \cos \omega t = 0$

$\rightarrow a = 0$

7.1.1 Energia mecânica no MHS

quando um corpo oscila preso a uma mola a E_c e a E_P do sistema massa-mola variam com o tempo, embora a E_{total} se conserva

Vamos demonstrar matematicamente que a E_{total} se conserva

$$\to \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \qquad \to \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \qquad \to \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dx}v$$

Regra da cadeia

Da 2ª Lei de Newton, temos: $\to m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \to m\frac{dv}{dx}v = -kx \quad \to m\,v\,dv = -kx\,dx \quad \to \int m\,v\,dv = -\int kx\,dx$

$$\to m\int_{v_0}^{v(t)} v\,dv = -k\int_{x_0}^{x(t)} x\,dx \quad \to m\left(\frac{1}{2}v(t)^2 - \frac{1}{2}{v_0}^2\right) = -k\left(\frac{1}{2}x(t)^2 - \frac{1}{2}{x_0}^2\right) \quad \to \frac{mv(t)^2}{2} - \frac{m{v_0}^2}{2} = \frac{k{x_0}^2}{2} - \frac{kx(t)^2}{2}$$

$$\to \frac{mv(t)^2}{2} + \frac{kx(t)^2}{2} = \frac{m{v_0}^2}{2} + \frac{k{x_0}^2}{2}$$

$\boxed{\to E_F = E_I}$ $\boxed{\to E = E_C + E_P}$

sendo $x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ e $v(t) = -A\omega\, sen(\omega t + \alpha)$

$$\boxed{E_C = \frac{mv(t)^2}{2}}$$

$$\boxed{E_P = \frac{kx(t)^2}{2}}$$

$$\rightarrow E_C = \frac{mv(t)^2}{2} \rightarrow E_C = \frac{m}{2}\,[-A\omega\, sen\,(\omega t + \alpha)]^2$$

$$\rightarrow E_C = \frac{m}{2} A^2\omega^2 sen^2\,(\omega t + \alpha) \qquad \omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\rightarrow E_C = \frac{m}{2} A^2 \frac{k}{m} sen^2\,(\omega t + \alpha)$$

$$\boxed{\rightarrow E_C = \frac{kA^2}{2} sen^2\,(\omega t + \alpha)}$$

$$\rightarrow E_P = \frac{kx(t)^2}{2} \quad \rightarrow E_P = \frac{k}{2}\,[A\cos\,(\omega t + \alpha)]^2$$

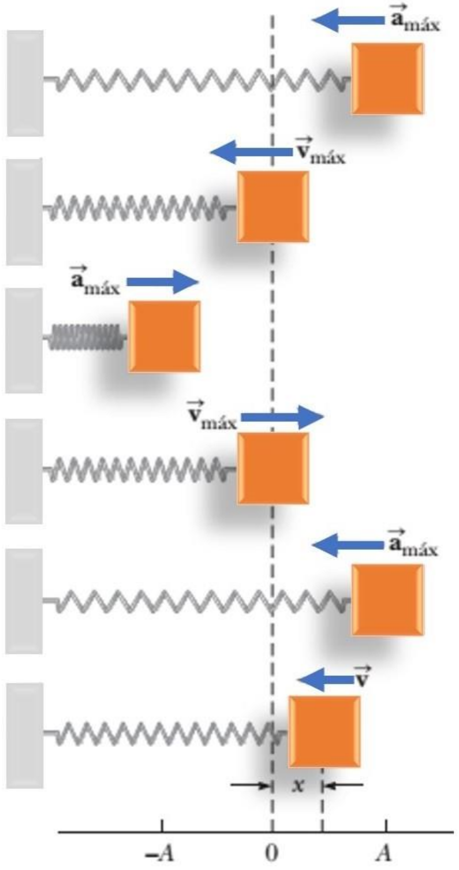
$$\rightarrow E_P = \frac{k}{2} A^2\cos^2\,(\omega t + \alpha)$$

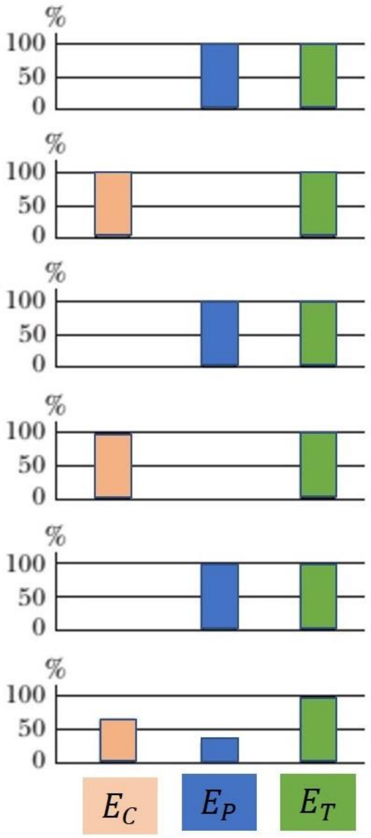
$$\boxed{\rightarrow E_P = \frac{kA^2}{2}\cos^2\,(\omega t + \alpha)}$$

$$\boxed{\rightarrow E = E_C + E_P}$$

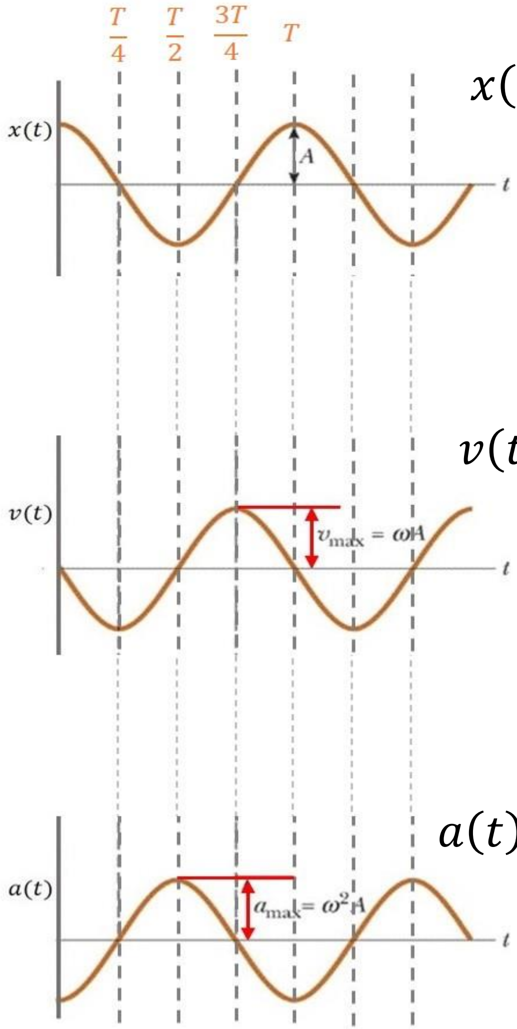
$$\rightarrow E = \frac{kA^2}{2} sen^2\,(\omega t + \alpha) + \frac{kA^2}{2}\cos^2\,(\omega t + \alpha) \quad \rightarrow E = \frac{kA^2}{2}[sen^2\,(\omega t + \alpha) + \cos^2\,(\omega t + \alpha)]$$

$$\boxed{\rightarrow E = \frac{kA^2}{2}}$$





t	x	v	a	E_c	E_P
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{T}{4}$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$\frac{T}{2}$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$\frac{3T}{4}$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
t	x	v	$-\omega^2 x$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}kx^2$



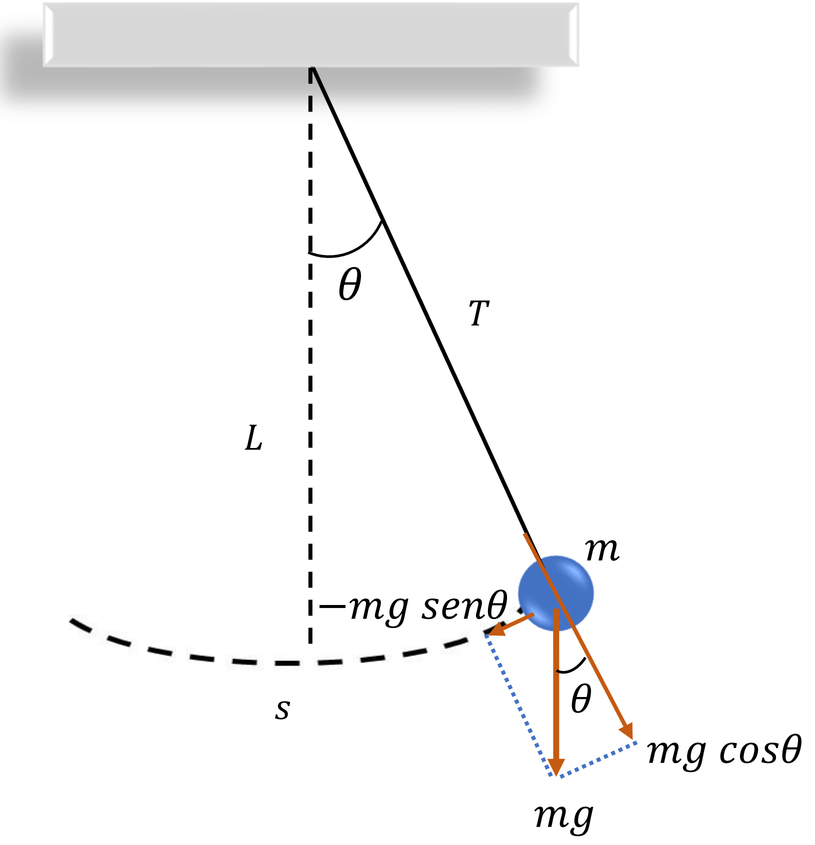
$$x(t) = A\cos\omega t$$

$$v(t) = -\omega A \operatorname{sen}\omega t$$

$$a(t) = -\,\omega^2 A\cos\,\omega t$$

7.2 Pêndulo simples

Um pêndulo simples é definido como uma partícula de massa m presa em uma extremidade de um fio de comprimento L (massa desprezível)



$$F = ma \;\rightarrow\; -mg\,sen\theta = m\,a \;\rightarrow\; -mg\,sen\theta = m\,\frac{d^2s}{dt^2}$$

MHS → θ muito pequeno → $sen\,\theta \approx \theta$

$$s = L\,\theta \rightarrow \theta = \frac{s}{L}$$

$$-\cancel{m}g\,\theta = \cancel{m}\,\frac{d^2s}{dt^2} \rightarrow -g\,\frac{s}{L} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

Os deslocamentos no MHS devem ser pequenos $\rightarrow s < L$

A frequência angular de oscilação ω é definida como $\rightarrow \boxed{\omega^2 = \frac{g}{L}}$

$$\rightarrow -g\frac{s}{L} = \frac{d^2s}{dt^2} \quad \rightarrow -\omega^2 s = \frac{d^2s}{dt^2} \rightarrow \quad \frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0$$

$s(t) = A\,cos(\omega t + \alpha)$ ou $s(t) = A\,sen(\omega t + \alpha)$

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

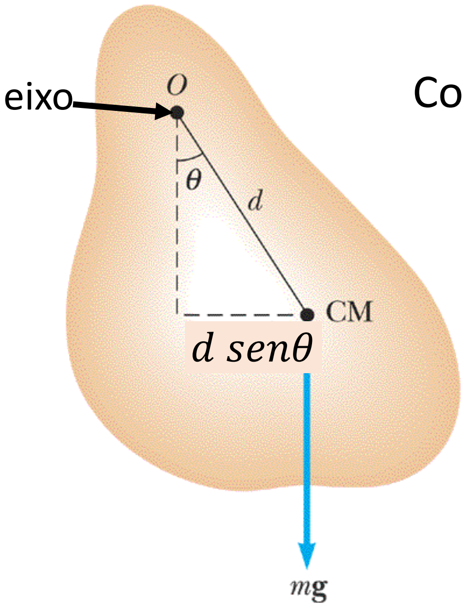
o período independe da amplitude s

o período independe da massa m do corpo

qto maior for L maior será o período

o período depende do local determina g

7.3 Pêndulo físico



Corpo rígido centrado em um ponto 0 a uma distância d do centro de massa.

A força gravitacional gera um torque em relação a um eixo que passa por 0.

$$\text{Módulo} \rightarrow \tau = mg\ dsen\theta$$

$$\rightarrow \tau = I\alpha \rightarrow -mgdsen\theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \boxed{sen\ \theta \approx \theta}$$

$$\rightarrow -mgd\ \theta = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgd\ \theta = 0 \quad \rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\ \theta = 0 \qquad \boxed{\frac{mgd}{I} = \omega^2}$$

$$\rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

$$\rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0$$

Soluções $\rightarrow \theta(t) = A\,cos(\omega t + \alpha)$ ou $\theta(t) = A\,sen(\omega t + \alpha)$

$$\omega^2 = \frac{mgd}{I} \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

se a localização do centro de massa (d) for conhecida, o momento de inércia pode ser obtido pela medida do período

7.4 Oscilações amortecidas

Movimento real $\rightarrow$ forças resistivas

$\downarrow$

a $\mathrm{E} \downarrow$ *no tempo* $\rightarrow$ Movimento amortecido

$F_a = -bv \rightarrow$ força resistiva

$F = -kx \rightarrow$ força elástica

$$\rightarrow \sum F = -kx - bv = ma \rightarrow ma = -kx - bv \rightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} \quad \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

$\rightarrow \frac{k}{m} = {\omega_0}^2$ $\rightarrow$ frequência natural de oscilação do sistema

$\rightarrow \frac{b}{m} = 2\gamma$ $\rightarrow$ amortecimento

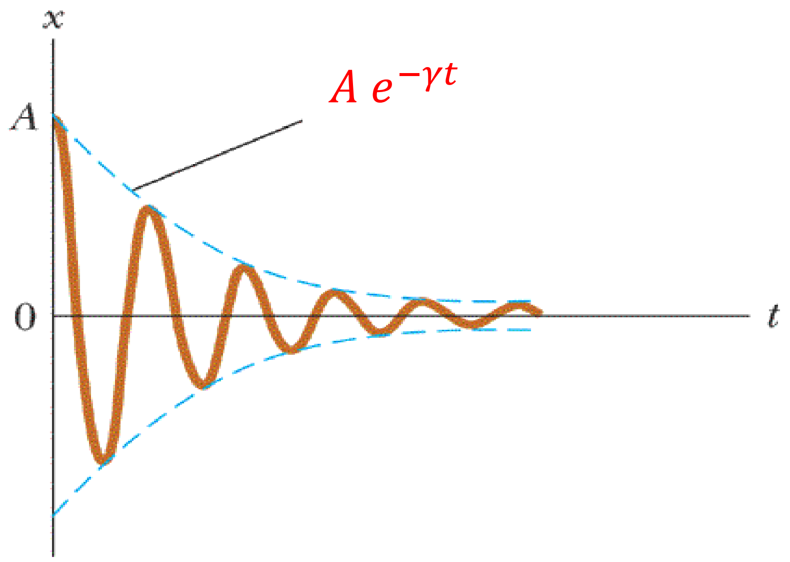
$$\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = 0$$

Para pequenos amortecimentos → $\gamma < \omega_0$

$$x(t) = A\, e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha) \text{ ou } x(t) = A\, e^{-\gamma t} \operatorname{sen}(\omega t + \alpha)$$

A frequência angular do oscilador amortecido é: $\rightarrow \omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$

A equação $x(t) = A\, e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha)$ indica que o efeito do amortecimento é diminuir a frequência das oscilações



$A\, e^{-\gamma t}$ → decai com o tempo

↓

a amplitude A não é constante

$$\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

se:

$b = 0 \rightarrow$ não há forças resistivas $\rightarrow$ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\rightarrow$ MHS

$b =$ valor crítico $\rightarrow \frac{b}{2m} = \omega_0 \rightarrow$ o sistema não oscila $\rightarrow$ criticamente amortecido

meio viscoso $\rightarrow$ retorna ao equilíbrio de maneira exponencial

$b =$ valor alto $\rightarrow \frac{b}{2m} > \omega_0 \rightarrow$ o sistema não oscila $\rightarrow$ super amortecido

7.4.1 Energia no sistema de oscilações amortecidas

$$\boxed{\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = 0} \quad \boxed{x(t) = A\, e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha)} \quad {\omega_0}^2 = \frac{k}{m} \quad \gamma = \frac{b}{2m} \quad \omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

qdo há forças resistivas a E do oscilador cai para 0 $\rightarrow$ transformação da E em energia interna

oscilador ligeiramente amortecido $\rightarrow \gamma < \omega_0$

↓

pequena fração da E é perdida $\rightarrow \frac{dE}{dt} \rightarrow \frac{dE}{dt} = P \rightarrow$ potência da força resistiva $\rightarrow \frac{dE}{dt} = P = F_a v$

$\rightarrow \frac{dE}{dt} = -bvv \rightarrow \frac{dE}{dt} = -b\, v^2$ vamos trabalhar com uma velocidade média $\rightarrow$ $E_C = \frac{mv^2}{2} \rightarrow v^2 = \frac{2\,E}{m} \rightarrow \overline{v}^2 = \frac{E}{m}$

$$\rightarrow \frac{dE}{dt} = -b\, v^2 \quad \rightarrow \frac{dE}{dt} = -b\frac{E}{m} \quad \rightarrow \frac{dE}{E} = -\frac{b}{m}dt \quad \rightarrow \int\frac{dE}{E} = -\frac{b}{m}\int dt \quad \boxed{\rightarrow \ln E = -\frac{b}{m}t + C}$$

Resolvendo

$\rightarrow ln\,E = -\frac{b}{m}t + C \;\rightarrow\; e^{ln\,E} = e^{-\frac{b}{m}t+C}$ $\rightarrow E = e^{-\frac{b}{m}t}.\,e^{C}$ Condições contorno $\rightarrow$ p/ $t = 0 \rightarrow E = E_0$

$\rightarrow E_0 = e^{-\frac{b}{m}0}.\,e^{C} \;\rightarrow \underline{e^{C} = E_0 = cte} \;\rightarrow E = E_0 e^{-\frac{b}{m}t}$

$\tau = \frac{m}{b} \rightarrow$ cte de tempo

$\boxed{\rightarrow E = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}$

b pequeno $\rightarrow \tau$ grande $\rightarrow$ oscilador perde uma fração pequena de E

$$\rightarrow \frac{dE}{E} = -\frac{b}{m}dt \;\rightarrow \frac{\Delta E}{E} = -\frac{b}{m}T$$

$\rightarrow E$ é a E_T e ΔE é a perda de E em um T $\rightarrow$ temos uma grandeza adimensional $\rightarrow$ fator de qualidade Q

$\downarrow$

$$\boxed{Q = 2\pi\,\frac{\tau}{T}}$$

7.5 Oscilações forçadas e ressonância

oscilações que ocorrem em decorrência de força externa oscilatória

$F = F_0 cos\omega_f t$ → força externa oscilatória

$F_a = -bv$ → força resistiva

$F = -kx$ → força elástica

$$\rightarrow \sum F = F_0 cos\omega_f t - kx - bv = ma \quad \rightarrow a = \frac{d^2x}{dt^2} \quad \rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_0 cos\omega_f t$$

$$\boxed{\rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m} cos\omega_f t}$$

$\rightarrow \frac{k}{m} = {\omega_0}^2$ → frequência natural $\quad \rightarrow \frac{b}{m} = 2\gamma$ → amortecimento

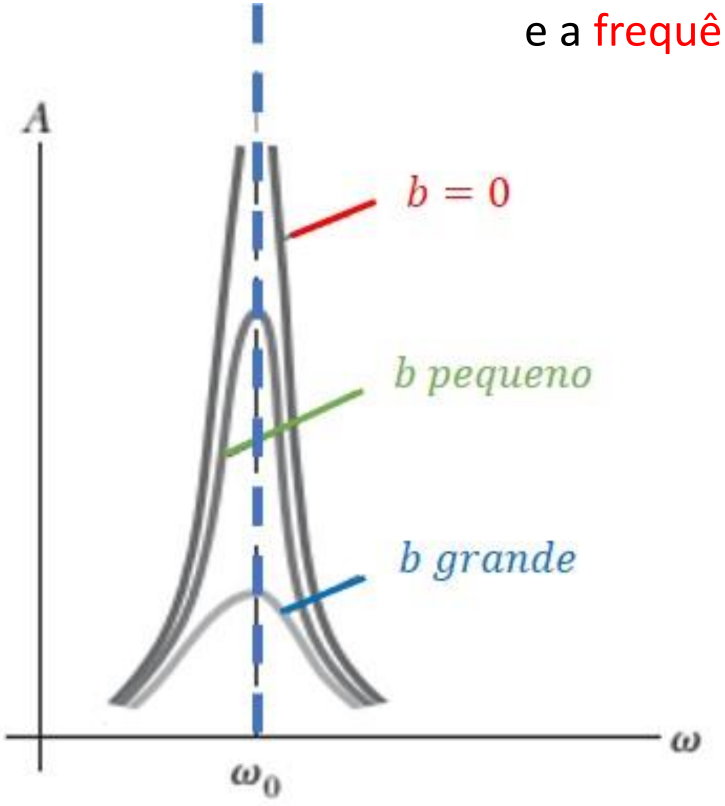
$\rightarrow \omega_f$ → frequência angular da força externa → o sistema oscila com essa frequência

$$x(t) = A\, sen(\omega_f t - \alpha) \qquad A = \frac{F_0/m}{\left[\left({\omega_f}^2 - {\omega_0}^2\right)^2 + 4\gamma^2{\omega_f}^2\right]^{1/2}} \qquad tg\alpha = \frac{{\omega_f}^2 - {\omega_0}^2}{2\gamma\omega_f}$$

A eq. 3 mostra que a amplitude do oscilador forçado é cte para uma dada força propulsora porque ele está sendo impulsionado no estado estacionário por uma força externa.

Para pouco amortecimento, a amplitude se torna grande quando a frequência da força propulsora (ω_f) é próxima da frequência natural de oscilação (ω_0).

O aumento dramático de amplitude próximo da frequência natural é chamado de ressonância, e a frequência natural ω_0 é chamada de frequência de ressonância do sistema



certos circuitos elétricos sintonizadores de rádio → sintonizadores de rádio

cordas vibrantes e colunas de ar → instrumentos musicais

Ponte Tacoma Narrows (07/11/1940) →

Ponte Tacoma Narrows (07/11/1940)

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \;\; ; x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \qquad ; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$E_C = \frac{mv(t)^2}{2} \quad \rightarrow E_C = \frac{kA^2}{2} sen^2\,(\omega t + \alpha)$$

$$E_P = \frac{kx(t)^2}{2} \quad \rightarrow E_P = \frac{kA^2}{2} cos^2\,(\omega t + \alpha)$$

$$E = \frac{kA^2}{2}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega^2 s = 0 \quad ; s(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{L} \qquad ; T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0 \quad ; \theta(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$\omega^2 = \frac{I}{mgd} \qquad ; T = 2\pi\sqrt{\frac{mgd}{I}}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = 0 \quad ; x(t) = A\, e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha)$$

$${\omega_0}^2 = \frac{k}{m} \qquad ; \gamma = \frac{b}{2m} \qquad ; \omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

$$E = E_0 e^{-\frac{b}{m}t} \qquad ; \tau = \frac{m}{b} \qquad ; E = E_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad ; Q = 2\pi\,\frac{\tau}{T}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\gamma\frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega_f t \qquad ; x(t) = A\, sen(\omega_f t - \alpha)$$

$$A = \frac{F_0/_m}{\left[\left({\omega_f}^2 - {\omega_0}^2\right)^2 + 4\gamma^2{\omega_f}^2\right]^{1/2}} \qquad ; tg\alpha = \frac{{\omega_f}^2 - {\omega_0}^2}{2\gamma\omega_f}$$

Um carrinho de 0,500 kg conectado a uma mola leve com constante de força 20,0 N/m oscila em um trilho de ar horizontal, sem atrito. Calcule a velocidade máxima do carrinho se a amplitude do movimento é de 3,00 cm. (a) Qual é a velocidade do carrinho quando a posição é 2,00 cm? (b) Calcule a energia cinética e potencial do sistema quando a posição do carrinho é 2,00 cm.

$$m = 0{,}500\ kg \qquad v_{máx} \qquad v_{máx} = \omega A \qquad E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

$$k = 20{,}0\ N/m \qquad E_T = \frac{1}{2}kA^2$$

$$A = 3{,}00\ cm \qquad qdo\ x = 2{,}00\ cm \rightarrow\ v; E_c; E_P \qquad E_P = \frac{1}{2}kx^2$$

(a) $$v_{máx} = \omega^2 A \ \rightarrow v_{máx} = \sqrt{\frac{k}{m}}A \ \rightarrow v_{máx} = \sqrt{\frac{20{,}0}{0{,}500}}\ 0{,}030 \ \rightarrow v_{máx} = 0{,}190\ m/s$$

(b) $$E_c + E_P = E \ \rightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 \ \rightarrow mv^2 = kA^2 - kx^2 \ \rightarrow v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2) \ \rightarrow v = \sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{20{,}0}{0{,}500}(0{,}03^2 - 0{,}02^2)} \ \ qdo\ x = 2{,}00\ cm \rightarrow \ \ v = \pm 0{,}141\ m/s$$

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \ \rightarrow E_c = \frac{1}{2}0{,}500\ 0{,}141^2 \ \rightarrow E_c = 5{,}00\ 10^{-3}\ J$$

$$E_P = \frac{1}{2}kx^2 \ \rightarrow E_P = \frac{1}{2}20{,}0\ 0{,}02^2 \ \rightarrow E_P = 4{,}00\ 10^{-3}\ J$$

$$E_T = \frac{1}{2}kA^2 \ \rightarrow E_T = \frac{1}{2}20{,}0\ 0{,}03^2 \ \rightarrow E_T = 9{,}00\ 10^{-3}\ J$$

E se o carrinho do exemplo anterior, fosse colocado em movimento liberando-o da mesma posição $x = 3{,}00\ cm$, mas com velocidade inicial de $v = -0{,}100\ m/s$? Quais seriam as novas amplitude e velocidade máxima do carrinho?

$$\rightarrow E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad \rightarrow E = \frac{1}{2}0{,}500\ (-0{,}100)^2 + \frac{1}{2}20{,}0\ 0{,}03^2 \qquad \rightarrow E = 1{,}15\ 10^{-3}\ J$$

$$\rightarrow E_T = \frac{1}{2}kA^2 = 1{,}15\ 10^{-3}\ J \quad \rightarrow \frac{1}{2}20{,}0\ A^2 = 1{,}15\ 10^{-3} \rightarrow A = \sqrt{\frac{1{,}15\ 10^{-3}}{10}} \qquad \rightarrow A = 0{,}0339\ m$$

$$\rightarrow v_{máx} = \omega A \quad \rightarrow v_{máx} = \sqrt{\frac{k}{m}}A \qquad \rightarrow v_{máx} = \sqrt{\frac{20{,}0}{0{,}500}}\ 0{,}0339 \qquad \rightarrow v_{máx} = 0{,}214\ m/s$$

Um corpo oscilando na extremidade de uma mola horizontal desliza para a frente e para trás sobre uma superfície sem atrito. Durante uma oscilação, você coloca um objeto idêntico ao primeiro no ponto máximo de deslocamento, com cola de secagem rápida na sua superfície. Assim que o corpo oscilante alcançar o seu deslocamento máximo e estiver momentaneamente em repouso, ele adere ao novo corpo por meio da cola e os dois corpos continuam a oscilação juntos. (a) O período de oscilação se altera? (b) A amplitude da oscilação se altera? (c) A energia da oscilação se altera?

(a) sim, o período depende da massa $T = \frac{2\pi}{\omega}$ e $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ $\rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \rightarrow antes$ $\rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m+M}{k}} \rightarrow depois$

(b) não, o corpo "novo" foi adicionado no momento de máxima amplitude e com o corpo original em repouso $\rightarrow x(t) = A\,cos(\omega t + \alpha)$

(c) não, o corpo "novo" foi adicionado no momento de máxima amplitude, com a $E_T = E_P = \frac{kA^2}{2}$

O corpo com a massa aumentada passará pelo ponto de equilíbrio em menor velocidade (já que a massa aumentou), porém com a mesma $E_T = \frac{kA^2}{2}$

De maneira geral, nenhum trabalho ou nenhuma outra forma de energia foi transferida para o sistema, portanto, não há como a E_T aumentar

Um relógio de pêndulo depende do período do pêndulo para manter a hora certa. (i) Suponha que esse relógio esteja calibrado corretamente e, então, uma criança levada desliza o peso do pêndulo para baixo na haste oscilatória. O relógio então funciona (a) devagar, (b) rápido ou (c) corretamente? (ii) Suponha que esse mesmo relógio seja calibrado corretamente no nível do mar e depois levado para o topo de uma montanha muito alta. O relógio então funciona (a) devagar, (b) rápido ou (c) corretamente?

(i) devagar $\rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ $\rightarrow \uparrow L$ logo o $T \uparrow$

(ii) devagar $\rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ $\rightarrow \downarrow g$ logo o $T \uparrow$

Uma pessoa entra em uma torre e gostaria de saber qual a altura dessa torre. Ela observa que há um pêndulo longo que se estende do teto até quase o chão e que seu período é de 10s. É possível saber a altura da torre?

Sim, é possível ter um valor aproximado da altura da torre utilizando a equação do período de um pêndulo simples.

$$\rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad \rightarrow L = \frac{gT^2}{4\pi^2} \quad \rightarrow L = \frac{9{,}8\ 10^2}{4\pi^2} \quad \rightarrow L \cong 25\ m$$

Uma partícula oscila em MHS no eixo x de acordo com

$x(t) = 4{,}00\cos(\pi t + {}^{\pi}/_{4})$ onde x está em m e t em s.

(a) $A = ?$; $f = ?$ e $T = ?$; $x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$ $\quad x(t) = 4{,}00\cos(\pi t + {}^{\pi}/_{4})$ $\quad A = 4{,}00\ m;\ \omega = \pi\ rad/s;\ \alpha = \frac{\pi}{4}$

$A = 4{,}00\ m;$ $\quad \omega = 2\pi f \rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi}$ $\quad \rightarrow f = \frac{\pi}{2\pi}$ $\quad \rightarrow f = \frac{1}{2}\ Hz$ $\quad T = \frac{1}{f}$ $\quad \rightarrow T = 2{,}00\ s$

(b) $v(t)$ e $a(t)$; $\quad x(t) = A\cos(\omega t + \alpha);$ $\quad v(t) = -A\omega\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \alpha);$ $\quad a(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \alpha)$

$x(t) = 4{,}00\cos(\pi t + \frac{\pi}{4})$ $\quad v(t) = -4{,}00\pi\,\mathrm{sen}(\pi t + \frac{\pi}{4})$ $\quad a(t) = -4{,}00\pi^2\cos(\pi t + \frac{\pi}{4})$

(c) qdo $t = 0$; $v(0) = ?$ e $x(0) = ?$

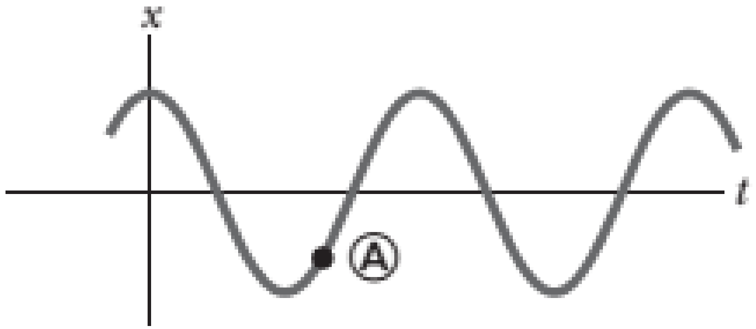
$$x(t) = 4{,}00\cos(\pi t + \frac{\pi}{4}) \rightarrow x(0) = 4{,}00\cos(\pi 0 + \frac{\pi}{4}) \rightarrow x(0) = 4{,}00\cos\frac{\pi}{4} \rightarrow \quad x(0) = 2{,}83\ m$$

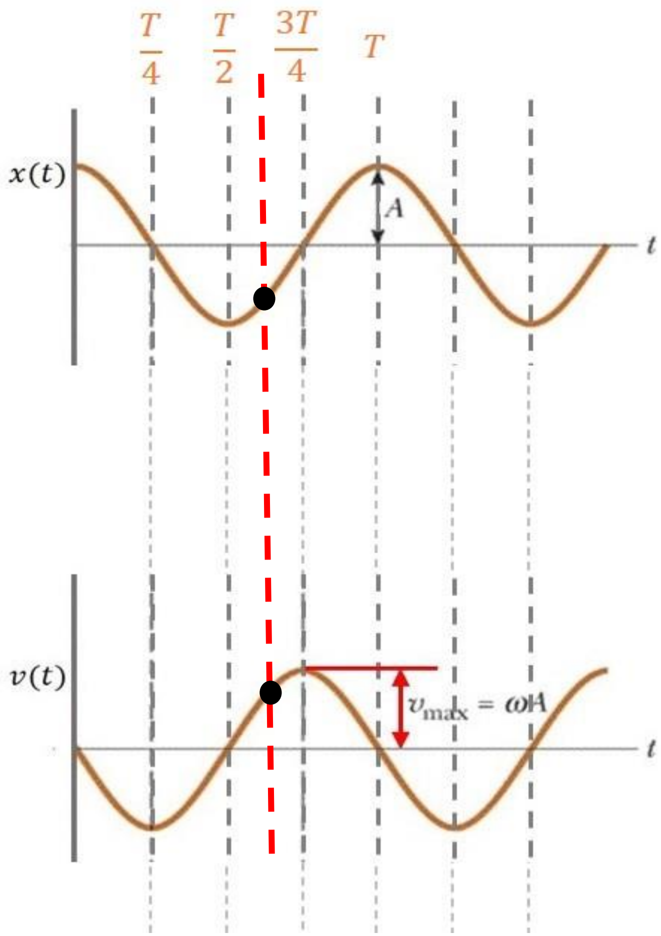
$$v(t) = -4{,}00\pi\,\mathrm{sen}(\pi t + \frac{\pi}{4}) \rightarrow v(0) = -4{,}00\pi\,\mathrm{sen}(\pi 0 + \frac{\pi}{4}) \rightarrow v(0) = 4{,}00\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4} \rightarrow \quad v(0) = -8{,}89\ m/s$$

Considere uma representação gráfica de MHS conforme descrita matematicamente pela equação

$$\rightarrow x(t) = A\,cos(\omega t + \alpha)$$

Quando a partícula está no ponto A, o que pode ser dito sobre sua posição e velocidade? (a) Ambas, posição e velocidade, são positivas. (b) A posição e a velocidade são negativas. (c) A posição é positiva e a velocidade é zero. (d) A posição é negativa e a velocidade é zero. (e) A posição é positiva e a velocidade é negativa. (f) A posição é negativa e a velocidade é positiva.

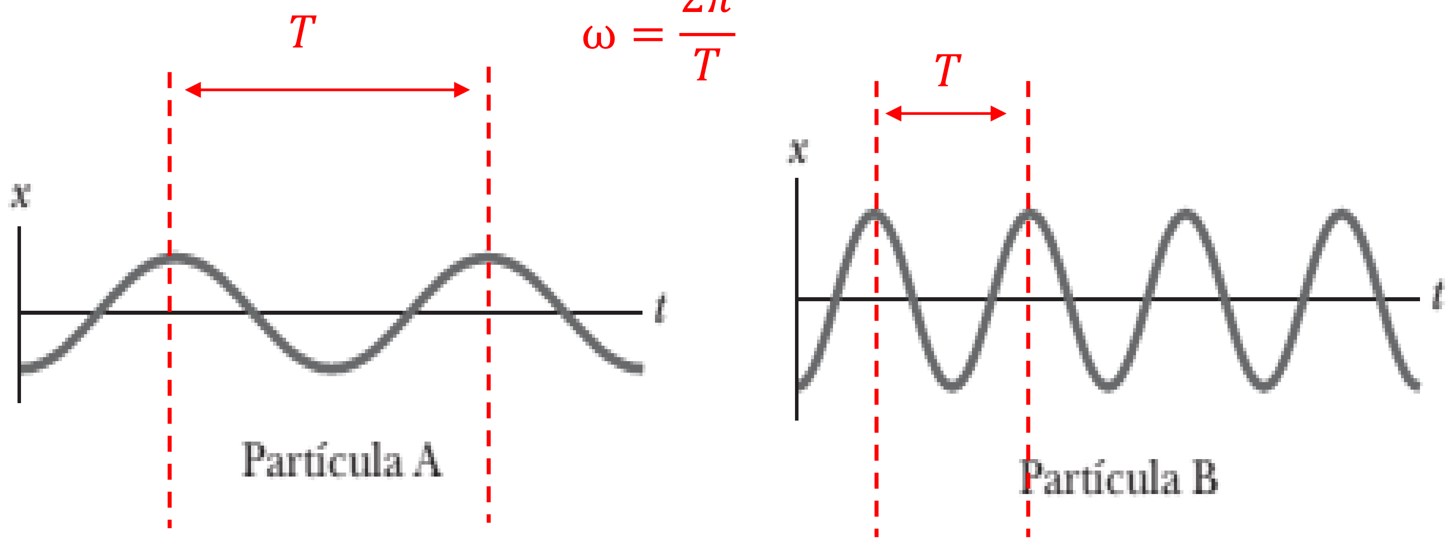




(f) A posição é negativa e a velocidade é positiva

A Figura mostra duas curvas representando partículas submetidas ao MHS. A descrição correta destes dois movimentos é que o MHS da partícula B é (a) de maior frequência angular e maior amplitude que o da partícula A, (b) de maior frequência angular e menor amplitude que da partícula A, (c) de menor frequência angular e maior amplitude que o da partícula A, ou (d) de menor frequência angular e menor amplitude que o da partícula A.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$



(a) de maior frequência angular e maior amplitude que o da partícula A

A extremidade esquerda de uma mola horizontal é mantida fixa. É colocado um dinamômetro na extremidade livre da mola e ela é puxada para a direita. Verifica-se que a força para esticar a mola até uma distância de 0,030 m é de 6,0 N. Remove-se o dinamômetro e coloca-se um corpo de 0,50 kg e estica-se o sistema até uma distância de 0,020 m. O corpo é liberado do repouso e realiza um MHS. (a) Calcule a constante da mola. (b) Calcule a frequência, a frequência angular e o período de oscilação.

(a) Calcule a constante da mola $F = 6{,}0 N \quad x = 0{,}030\, m$

$$\rightarrow F = -kx \quad \rightarrow k = -\frac{F}{x} \quad \rightarrow k = -\frac{6{,}0}{0{,}030} \quad \rightarrow k = 200\ N/m$$

(b) Calcule a frequência, a frequência angular e o período de oscilação $m = 0{,}50\, kg \quad x = 0{,}020\, m$

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{200}{0{,}50}} \quad \rightarrow \omega = 20\, rad/s$$

$$\rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \quad \rightarrow f = \frac{20}{2\pi} \quad \rightarrow f = 3{,}2\ Hz$$

$$\rightarrow T = \frac{1}{f} \quad \rightarrow T = \frac{1}{3{,}2} \quad \rightarrow T = 0{,}31\ s$$

Utilizando o exercício anterior, um corpo de 0,50 kg preso a uma mola de constante k= 200 N/m agora o deslocamento inicial é de 0,015m com uma velocidade inicial de 0,40 m/s. (a) Calcule o período, a amplitude e a constante de fase. (b) Escreva as equações para o deslocamento, a velocidade e aceleração em função do tempo.

liberado repouso $\rightarrow t = 0; x(0) = A \; e \; v(0) = 0; qdo \; \alpha = 0$

$\rightarrow t = 0; x(0) = 0{,}015 \; m \; e \; v(0) = 0{,}40 m/s;$

$A = ? \quad e \quad \alpha = ?$

$\rightarrow x(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \rightarrow x(0) = A\cos\alpha = 0{,}015$

$\rightarrow v(t) = -A\omega \, sen(\omega t + \alpha) \rightarrow v(0) = A\omega \operatorname{sen}\alpha = -0{,}40$

(a) Calcule o período, a amplitude e a constante de fase

período

$$\rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

o período não muda, depende apenas da massa e de k

amplitude

$$\boxed{\rightarrow A\cos\alpha = 0{,}015}$$

$$A\omega \operatorname{sen}\alpha = -0{,}40 \quad \rightarrow A\operatorname{sen}\alpha = -\frac{0{,}40}{\omega} \quad \rightarrow A\operatorname{sen}\alpha = -\frac{0{,}40}{20} \quad \boxed{\rightarrow A\operatorname{sen}\alpha = -0{,}02}$$

$$A^2cos^2\alpha = 0{,}015^2$$

$$A^2cos^2\alpha + A^2sen^2\alpha = 0{,}015^2 + (-0{,}02)^2 \quad \rightarrow A^2 \; (cos^2\alpha + sen^2\alpha) = 0{,}000625 \quad \rightarrow A = 0{,}025 \; m$$

$$A^2sen^2\alpha = (-0{,}02)^2$$

constante de fase

$$A\cos\alpha = 0{,}015 \rightarrow 0{,}025\cos\alpha = 0{,}015 \rightarrow \cos\alpha = \frac{0{,}015}{0{,}025} \rightarrow \cos\alpha = 0{,}6 \rightarrow \alpha = 53° \rightarrow \alpha = -53°$$

Se adotarmos $\alpha = 53°$ $\quad A\omega\,\mathrm{sen}\,\alpha \neq -0{,}40$ $\quad \boxed{0{,}025.20.0{,}79 = 0{,}40}$ $\rightarrow \alpha = -53° \rightarrow sen\,(-53°) = -0{,}79$

$$\rightarrow 360° = 2\pi\, rad \rightarrow \frac{360° \rightarrow 2\pi\, rad}{-53° \rightarrow x\, rad} \qquad \rightarrow x = -0{,}93\, rad$$

(b) $x(t) =?\,; v(t) =?\; e\; a(t) =?$

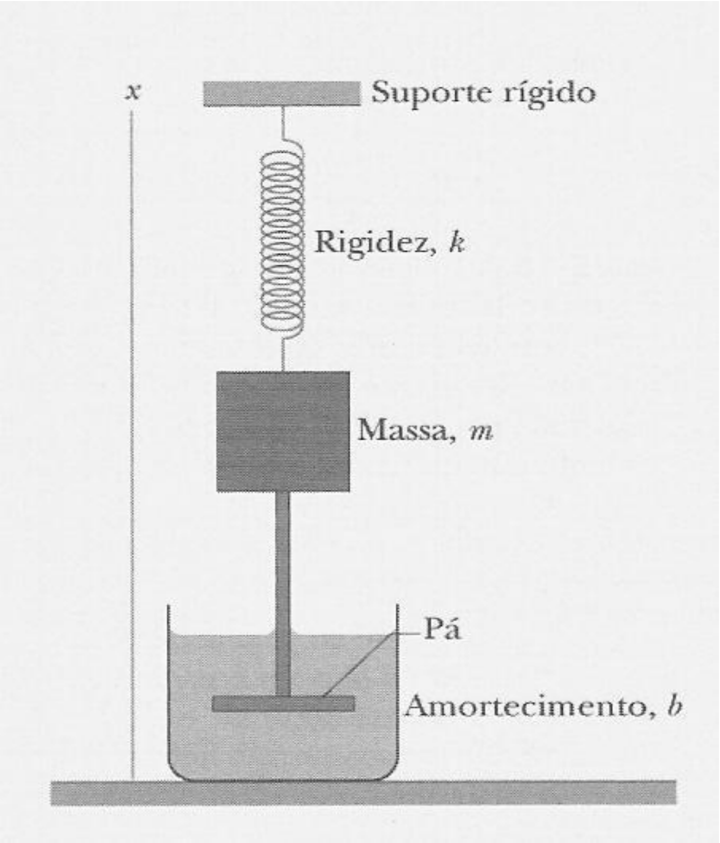
$$\rightarrow x(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \qquad \rightarrow x(t) = 0{,}025\cos(20t - 0{,}93)$$

$$\rightarrow v(t) = -A\omega\; sen\,(\omega t + \alpha) \qquad \rightarrow v(t) = -0{,}50\; sen\,(20t - 0{,}93)$$

$$\rightarrow a(t) = -A\omega^2\cos\,(\omega t + \alpha) \qquad \rightarrow a(t) = -10{,}0\cos\,(20t - 0{,}93)$$

Oscilador amortecido; massa = 250g; k= 85 N/m e b=70 g/s. (a) T=?; (b) tempo para que a amplitude das oscilações caia até metade do seu valor inicial? (c) qual a razão entre a amplitude das oscilações amortecidas e a amplitude inicial ao término de 20 ciclos?

$m = 0{,}25\ kg;\ k = 85\ N/m;\ b = 0{,}07\ kg/s$



a) $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \quad \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\dfrac{85}{0{,}25}} \cong 18{,}44\ rad/s$

$$\gamma = \frac{b}{2\,m} \quad \rightarrow \gamma = \frac{0{,}07}{2.0{,}25} = 0{,}14\ s^{-1} \qquad \gamma \ll \omega_0$$

$$\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2} = \sqrt{18{,}44^2 - 0{,}14^2} \cong \sqrt{340{,}0336 - 0{,}0196}$$

$$\rightarrow \omega \cong \sqrt{339{,}8376} \cong 18{,}43\ rad/s \cong 18{,}44\ rad/s = \omega_0$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \rightarrow T = \frac{2\pi}{18{,}4} \cong 0{,}34\ s$$

b) $x(t) = A\,e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha) \;\; \rightarrow x_{máx} = A\,e^{-\gamma t}\; para\; t = 0$

p/ t qualquer $\quad A\,e^{-\gamma t} = \frac{1}{2}\,A$

$\rightarrow\; e^{-\gamma t} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow -\gamma t = ln\frac{1}{2} \quad \rightarrow t = -\frac{1}{\gamma}ln\frac{1}{2} \quad \rightarrow t = \frac{1}{\gamma}\ln 2 \quad \rightarrow t = \frac{0{,}693}{0{,}14} \quad \rightarrow t \cong 5\;s$

---

c) $\quad T = 0{,}34s$ qdo $\quad t = 20\,T \rightarrow t = 6{,}8\;s$

p/ t qualquer $\;\rightarrow A\,e^{-\gamma t} = x\,A \quad \rightarrow\; e^{-\gamma t} = x \quad \rightarrow\; e^{-0{,}14.6{,}8} = e^{-0{,}952} \cong 0{,}39$

qdo $t = 20\,T$ a amplitude final será de 39% do valor da amplitude inicial

Sistema suspensão de um carro; $massa = 2000\,kg$ cede $10\,cm$ quando o chassis é colocado sobre ele e a cada ciclo a amplitude das oscilações diminui 50% (a) estime os valores de k e (b) b para uma roda.

$$m = \frac{2000}{4}kg; \qquad x = 0{,}10\,m; \qquad k = ?\,; \qquad b?$$

(a) $\quad F = -k.x = m.a \qquad \rightarrow F = -k.0{,}10 = 500.9{,}8 \qquad \rightarrow k = 4{,}9\;10^4\;N/m$

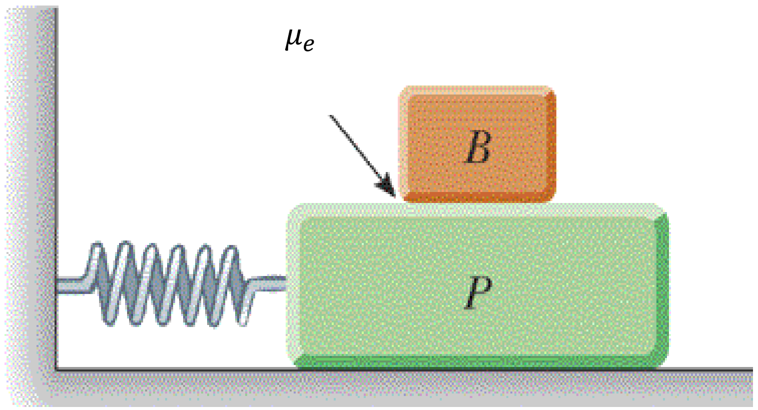
(b) $A \downarrow 50\% \;\rightarrow A\,e^{-\gamma t} = \frac{1}{2}A \qquad ;\gamma = \frac{b}{2m} \quad ;t = T \quad ;T = \frac{2\pi}{\omega} \quad ;\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \gamma \ll \omega_0 \;\rightarrow \omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2} \cong \omega_0$

$$\rightarrow \omega \cong \omega_0 = \sqrt{\frac{4{,}9\;10^4}{500}} \;\rightarrow \omega \cong 9{,}9\,rad/s \quad \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \cong \frac{2\pi}{9{,}9} \qquad \rightarrow T \cong 0{,}63\,s$$

$$\rightarrow A\,e^{-\gamma t} = \frac{1}{2}A \quad \rightarrow A\,e^{-\frac{b}{2m}t} = \frac{1}{2}A \;\rightarrow\; e^{-\frac{b}{2m}T} = \frac{1}{2} \quad \rightarrow -\frac{b}{2m}T = ln\frac{1}{2}$$

$$\rightarrow b = -\frac{2\,m}{T}ln\frac{1}{2} \;\rightarrow b = \frac{2\,m}{T}ln2 \;\rightarrow b = \frac{2\;500}{0{,}63}0{,}693 \;\rightarrow b \cong 1{,}1\;10^3\;kg/s$$

Um bloco P executa MHS; $f = 1{,}50\ Hz$; um bloco B repousa sobre ele com um coeficiente de atrito estático $\mu_e = 0{,}6$. Qual é a amplitude máxima sem que o bloco B deslize sobre o bloco P ?



$bloco\ P\ e\ B;\ f = 1{,}50\ Hz;\ \mu_e = 0{,}6;\ A_{máx} = ?$ $\quad \omega = 2\pi f \quad \rightarrow \omega \cong 9{,}42\ rad/s$

$$F_{máx} = F_{at} = \mu_e . N = \mu_e . P_B$$

$$F_{máx} = m\ a = m\ |A\ \omega^2|$$

$$F_{máx} = F_{at}$$

$$\mu_e . P_B = m\ |A\ \omega^2|$$

$$\mu_e . mg = m\ A\ \omega^2$$

$$\mu_e . g = A\ \omega^2$$

$$\rightarrow A = \frac{\mu_e . g}{\omega^2}$$

$$\rightarrow A = \frac{0{,}6 . 9{,}8}{9{,}42^2}$$

$$\rightarrow A \cong 0{,}07 m \qquad \rightarrow A \cong 7{,}0\ cm$$

A posição de uma partícula no instante t é dada por $x(t) = A\,sen(\omega t + \alpha)$ para um MHS. Obter a velocidade e a aceleração como função (a) do tempo t e (b) da posição x. Considere $\alpha = 0$.

(a) tempo t; $\alpha = 0$. $\quad x(t) = A\,sen\,\omega t \quad v(t) = A\omega\,cos\,\omega t \quad a(t) = -A\omega^2\,sen\,\omega t$

(b) posição x; $\alpha = 0$. $\quad sen^2\omega t + cos^2\omega t = 1$

$\rightarrow cos^2\omega t = 1 - sen^2\omega t \;X\; A^2 \quad \rightarrow A^2cos^2\omega t = A^2 - A^2sen^2\omega t \quad \rightarrow A\cos\omega t = \sqrt{A^2 - \underline{A^2sen^2\omega t}}$

$x(t) = A\,sen\,\omega t \quad \rightarrow x^2 = A^2sen^2\omega t$

$\rightarrow A\cos\omega t = \sqrt{A^2 - x^2}$

$x(t) = A\,sen\,\omega t$

$v(t) = A\omega\,cos\,\omega t \quad \rightarrow v(t) = \omega\,A\,cos\,\omega t \quad \rightarrow v(t) = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$

$a(t) = -A\omega^2\,sen\,\omega t \rightarrow a(t) = -\omega^2 A\,sen\,\omega t \;\rightarrow a(t) = -\omega^2 x$

Quando o deslocamento em um MHS (massa-mola) for igual à metade da amplitude máxima, que fração da E é: (a) E_C e E_P e (b) em que deslocamento, em termos de A, a E é metade da E_C e E_P ?

$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha) \quad ; E = \frac{kA^2}{2}$$

(a) E_P e E_C =? $\quad x = \frac{1}{2}A_{máx} \quad \rightarrow x(t) = A\cos(\omega t + \alpha) = \frac{A}{2}$

$$\rightarrow E_P = \frac{kx^2}{2} \quad ; x = \frac{A}{2} \quad \rightarrow E_P = \frac{k}{2}\left(\frac{A}{2}\right)^2 \quad \boxed{\rightarrow E_P = \frac{kA^2}{8}}$$

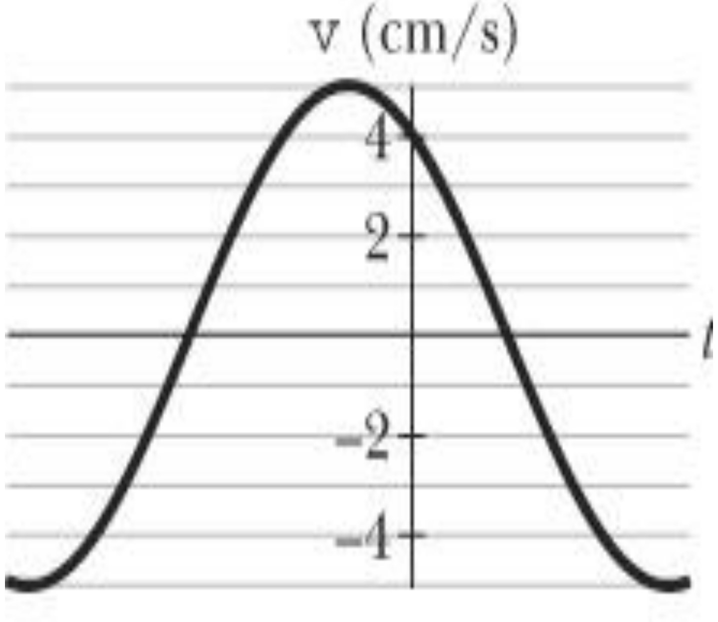
$$\rightarrow E = E_P + E_C = \frac{kA^2}{2} \quad \rightarrow E_C = \frac{kA^2}{2} - \frac{kA^2}{8} \quad \boxed{\rightarrow E_C = \frac{3\,kA^2}{8}}$$

logo $\quad \frac{E_P}{E} = \frac{\frac{kA^2}{8}}{\frac{kA^2}{2}} \quad \rightarrow \frac{E_P}{E} = \frac{1}{4} \quad \boxed{\rightarrow E_P = \frac{1}{4}E} \quad \boxed{\rightarrow E_C = \frac{3}{4}E}$

(b) $E_P = \frac{1}{2}E$ e $E_C = \frac{1}{2}E \quad x$ =?

$$\rightarrow E_P = \frac{kx^2}{2} \rightarrow \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}E \quad \rightarrow \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2}\frac{kA^2}{2} \quad \rightarrow x^2 = \frac{A^2}{2} \quad \boxed{\rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}A}$$

Qual é a constante de fase para o oscilador harmônico com função velocidade $v(t)$ (Fig) se a função posição é da forma $x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$?



$$x(t) = A\cos(\omega t + \alpha)$$

$$v(t) = -A\omega\, sen(\omega t + \alpha) \qquad ;\, v_{máx} = |A\omega|$$

Pelo gráfico $v_{máx} = 5{,}0\ cm/s$ e qdo $t = 0 \rightarrow v = 4{,}0\ cm/s$

$$v(t) = -A\omega\, sen(\omega t + \alpha) \qquad \rightarrow v(0) = -5{,}0\, sen(\omega.0 + \alpha) = 4{,}0$$

$$\rightarrow -5{,}0\, sen\ \alpha = 4{,}0 \qquad \rightarrow sen\ \alpha = -\frac{4{,}0}{5{,}0}$$

$$\rightarrow sen\ \alpha = -0{,}8 \qquad \rightarrow \alpha \cong -0{,}93\, rad$$